Analyse 2 - Partiel - 08/03/2022

Durée : 1h. Le barème est sur 20 points.

Exercice 1 - (7 points) Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence par $u_{n+1} = \ln(1 + \exp(\frac{u_n}{2}))$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $u_0 = 0$. On définit la fonction $f(x) = \ln(1 + \exp(\frac{x}{2}))$.

a. Calculer le domaine de définition de f.

b. Calculer la dérivée de f.

c. Montrer que l'intervalle $[0, 1]$ est stable par f sachant que $\ln(2) \simeq 0,69$ et $\ln(1+\sqrt{e}) \simeq 0,97$.

d. En déduire que la suite (u_n) est bien définie. La suite (u_n) est-elle bornée ? (Si oui préciser par quelles valeurs la suite est bornée)

e. Sachant que $f''(x) = \frac{e^{x/2}}{8e^{x/2}+4e^x+4}$ et sachant que $\frac{1}{2}\frac{\sqrt{e}}{1+\sqrt{e}} \simeq 0,311$ montrer que la fonction f est k-contractante sur $[0, 1]$ en précisant la valeur exacte de k.

f. À l'aide du théorème des valeurs intermédiaires, montrer que f admet un unique point fixe sur $[0, 1]$. Ce point fixe est-il attractif, répulsif ?

g. Montrer que la suite (u_n) converge vers ce point fixe de f.

Exercice 2 - (1 point) Montrer que la suite $(-1)^{n^2}\frac{n^2}{n^2+1}$ diverge.

Exercice 3 - (2 points) Est ce que les paires de suites (u_n) et (v_n) suivantes sont équivalentes ? ou est ce que $u_n = o(v_n)$? ou est ce que $v_n = o(u_n)$?

a. $u_n = 2^n$ et $v_n = 2^n\frac{n}{n+1}$.

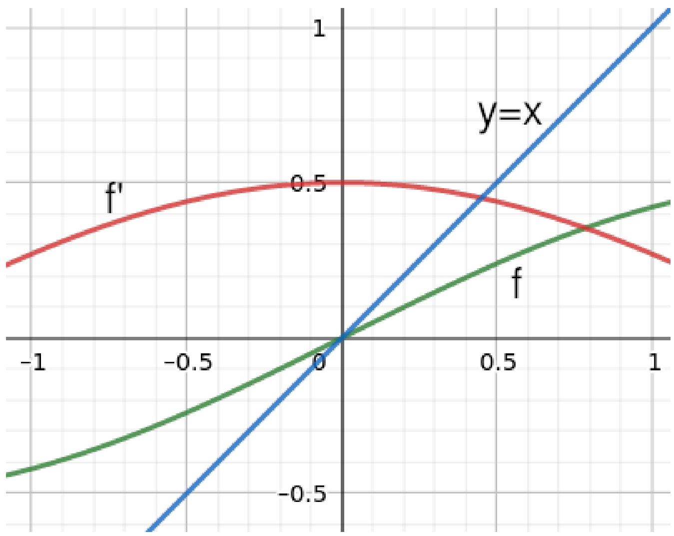
b. $u_n = 3^n$ et $v_n = n2^n$.

Exercice 4 - (3 points) On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ et dessinée en vert sur le graphique suivant (la courbe rouge est la dérivée de la fonction et la bleue la fonction $y = x$). On répondra aux questions en justifiant simplement à l'aide du graphique.

a. Est ce que l'intervalle $[-1; 1]$ est stable ?

b. Est ce que la fonction f est contractante sur cet intervalle ?

c. Donner une valeur approchée des points fixes sur cet intervalle et dire s'ils sont attractifs ou répulsifs.



Exercice 5 - (1,5 point) Soit (u_n) une suite strictement positive. Montrer que (S_n) la suite des sommes partielles des (u_n) est strictement croissante.

Exercice 6 - (1,5 point) Calculer la suite des sommes partielles de la série de terme général $\frac{1}{2^n} - 2(n+1)$. En déduire la nature de la série.

Exercice 7 - (4 points) Déterminer, et justifier, la nature des séries de terme général suivant :

$$(-1)^n \frac{1}{2^n} \qquad \frac{3}{n\ln(n)} \qquad \frac{n}{\ln(n)^2} \qquad \frac{2^n(n^2-1)}{n^2+1}$$