Examen Analyse 2 - E231MI5 - E322MI5 | MONTPELLIER
L1 MIASHS | 03/05/2022

Examen de première session

Durée : 1h30
Calculatrices non programmables ou avec mode examen autorisées.
La notation tiendra compte de la qualité de la rédaction et de la précision du raisonnement.

Exercice 1 [4 points]
On considère la suite $u_n = \frac{2}{4n^2+8n+3}$ définie pour tout $n \geq 0$.

a. Montrer que $(u_n)_{n\geq 0}$ est décroissante.

b. Calculer la limite de (u_n).

c. Vérifier que $u_n = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3}$.

d. Calculer la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ en utilisant une série téléscopique.

Exercice 2 [4 points]
On pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n\sqrt{n}} x^n$.

a. Calculer le rayon de convergence R de la série entière $\sum \frac{1}{2^n\sqrt{n}} x^n$. En déduire l'ensemble de définition de f.

b. Montrer que lorsque $x = 2$, la série entière $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n\sqrt{n}} x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n\sqrt{n}} 2^n$ diverge.

c. Montrer que lorsque $x = -2$, la série entière $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n\sqrt{n}} x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n\sqrt{n}} (-2)^n$ converge.

d. Calculer le développement en série entière de $f'(x)$ sur $]-R, R[$.

Exercice 3 [4 points]
On pose $I_n = \int_0^1 \frac{xe^{-nx}}{1+x^2} dx$ pour tout $n \geq 0$.

a. Calculer I_0.

b. Montrer que $0 \leq \frac{xe^{-nx}}{1+x^2} \leq xe^{-nx}$ pour tout $x \in [0,1]$ et tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.

c. Montrer que $\int_0^1 xe^{-nx} dx = -\frac{1}{n}e^{-n} - \frac{1}{n^2}e^{-n} + \frac{1}{n^2}$ pour tout $n \geq 1$.

d. Montrer que I_n tend vers 0.

Exercice 4 [4 points]

On voudrait définir la suite $(J_n)_{n\geq 0}$ par $J_n = \int_0^{+\infty} \frac{xe^{-nx}}{1+x^2} dx$ pour tout $n \geq 0$.

a. Pour $n = 0$, montrer que la fonction $\frac{xe^{-nx}}{1+x^2} = \frac{x}{1+x^2}$ n'est pas intégrable sur $[0, +\infty[$ en utilisant un équivalent en $+\infty$. Peut-on définir la suite (J_n) pour tout $n \geq 0$?

b. Pour $n \geq 1$, montrer que $\frac{e^{-nx}}{x} \leq e^{-nx}$ sur $[1, +\infty[$ et en déduire que $\frac{e^{-nx}}{x}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

c. Pour $n \geq 1$, montrer que $\frac{xe^{-nx}}{1+x^2} \sim \frac{e^{-nx}}{x}$ lorsque $x \to +\infty$. En déduire que $\frac{xe^{-nx}}{1+x^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

d. Pour $n \geq 1$, en déduire que $\frac{xe^{-nx}}{1+x^2}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$. En déduire que (J_n) est bien définie pour $n \geq 1$.

Exercice 5 [4 points]

a. Montrer que $\int_{\ln(5)}^{\ln(12)} \sqrt{4+e^t}dt = \int_a^b \frac{2x^2}{x^2-4} dx$ avec le changement de variable $x = \sqrt{4+e^t}$ en précisant les bornes $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

b. Décomposer $\frac{2x^2}{x^2-4}$ en éléments simples.

c. Calculer une primitive de $\frac{2x^2}{x^2-4}$ sur $]2; +\infty[$.

d. Calculer $\int_{\ln(5)}^{\ln(12)} \sqrt{4+e^t}dt$.

Examen : Corrections

Exercice 1

a. Il s'agit d'une suite explicite $u_n = f(n)$ avec $f(x) = \frac{2}{4x^2+8x+3}$. Or $f'(x) = \frac{-2(8x+8)}{(4x^2+8x+3)^2} \leq 0$ car $x \geq 0$. Donc f est décroissante sur $[0, +\infty[$. Donc (u_n) est décroissante.

b. Comme $4n^2 + 8n + 3$ tend vers $+\infty$, alors (u_n) tend vers 0.

c.

$$\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} = \frac{2n+3}{(2n+1)(2n+3)} - \frac{2n+1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{2n+3-(2n+1)}{4n^2+2n+6n+3} = \frac{2}{4n^2+8n+3} = u_n$$

d. On pose $a_n = \frac{1}{2n+1}$. Or $a_{n+1} = \frac{1}{2(n+1)+1} = \frac{1}{2n+3}$. Donc $u_n = a_n - a_{n+1}$. Comme a_n tend vers 0, alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = a_0 - \lim_{n \to +\infty} a_n = \frac{1}{1} - 0 = 1$$

Exercice 2

a. On pose $a_n = \frac{1}{2^n \sqrt{n}}$. Alors

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{2^{n+1}\sqrt{n+1}}}{\frac{1}{2^n}\sqrt{n}} = \frac{2^n \sqrt{n}}{2^{n+1}\sqrt{n+1}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{n}{n+1}}$$

Or $\frac{n}{n+1}$ tend vers 1 donc $\sqrt{\frac{n}{n+1}}$ tend vers $\sqrt{1} = 1$. Donc $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ tend vers $1/2$. Donc $R = 1/(1/2) = 2$ et f est définie sur $]-2, 2[$.

b. Comme $\frac{1}{2^n\sqrt{n}} 2^n = \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{1/2}}$ est le terme général d'une série de Riemann ($a = 1/2$) et que $a < 1$ alors la série diverge.

c. Comme $\frac{1}{2^n\sqrt{n}}(-2)^n = \frac{1}{2^n\sqrt{n}}(-1)^n 2^n = \frac{1}{\sqrt{n}}(-1)^n$ est le terme général d'une série alternée, il faut vérifier que $\frac{1}{\sqrt{n}}$ est décroissante et tend vers 0. Comme $\sqrt{n}$ est une suite croissante, alors $\frac{1}{\sqrt{n}}$ est décroissante. Comme $\sqrt{n}$ tend vers $+\infty$, alors $\frac{1}{\sqrt{n}}$ tend vers 0. Donc la série converge par le théorème des séries alternées.

d.

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n\sqrt{n}}(x^n)' = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n\sqrt{n}} n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{2^n} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{2^{n+1}} x^n$$

Exercice 3

a.

$$I_0 = \int_0^1 \frac{xe^0}{1+x^2} dx = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2}[\ln(1+x^2)]_0^1 = \frac{1}{2}(\ln(1+1) - \ln(1)) = \frac{\ln(2)}{2}$$

b. Comme $1 \leq 1 + x^2$, alors $\frac{1}{1+x^2} \leq 1$ pour tout $x \in [0,1]$. Comme $0 \leq xe^{-nx}$ pour $x \geq 0$, alors $xe^{-nx}\frac{1}{1+x^2} \leq xe^{-nx}1$. Donc $0 \leq \frac{xe^{-nx}}{1+x^2} \leq xe^{-nx}$ car la quantité de gauche est positive.

c. Par intégration par parties :

$$\int_0^1 xe^{-nx}dx = [x\frac{e^{-nx}}{-n}]_0^1 - \int_0^1 1 \cdot \frac{e^{-nx}}{-n}dx = \frac{-1}{n}(1e^{-n} - 0) + \frac{1}{n}\int_0^1 e^{-nx}dx = \frac{-e^{-n}}{n} + \frac{1}{n}[\frac{e^{-nx}}{-n}]_0^1$$

$$= \frac{-e^{-n}}{n} - \frac{1}{n^2}(e^{-n} - e^{-0}) = -\frac{1}{n}e^{-n} - \frac{1}{n^2}e^{-n} + \frac{1}{n^2}$$

d. De l'inégalité de b), on en déduit que $0 \leq I_n \leq \int_0^1 xe^{-nx}dx$. Or $\int_0^1 xe^{-nx}dx$ tend vers 0 (car les trois termes tendent vers 0). Donc par le théorème des gendarmes, I_n tend ver 0.

Exercice 4

a. $\frac{x}{1+x^2} \sim \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$ lorsque $x \to +\infty$ (règle des fractions rationnelles en $+\infty$). Or $\frac{1}{x}$ n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$ d'après les intégrales de Riemann ($a = 1$). Donc $\frac{x}{1+x^2}$ n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$ et donc pas sur $[0, +\infty[$.

Donc on ne peut pas définir (J_n) pour tout $n \geq 0$.

b. Comme $1 \leq x$ pour tout $x \in [1, +\infty[$, on en déduit que $\frac{1}{x} \leq 1$ et que $\frac{e^{-nx}}{x} \leq e^{-nx}$ car e^{-nx} est positif.

Comme $e^{-nx} = (e^{-n})^x = a^x$ avec $a = e^{-n}$ et que $a < 1$ (car $n \geq 1$), on en déduit que e^{-nx} est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Donc par l'inégalité précédente, on en déduit que $\frac{e^{-nx}}{x}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

c. Comme $\frac{xe^{-nx}}{1+x^2} \sim \frac{xe^{-nx}}{x^2} = \frac{e^{-nx}}{x}$ en $+\infty$ et que l'on vient de montrer que $\frac{e^{-nx}}{x}$ était intégrable sur $[1, +\infty[$, on en déduit que $\frac{xe^{-nx}}{1+x^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

d. Comme $\frac{xe^{-nx}}{1+x^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ et que la fonction est continue sur $[0, 1]$ alors elle est intégrable sur $[0, +\infty[$.

Donc (J_n) est bien définie pour $n \geq 1$.

Exercice 5

a. Comme $x = \sqrt{4 + e^t}$, alors $x^2 = 4 + e^t$, alors $x^2 - 4 = e^t$, alors $\ln(x^2 - 4) = t$. Donc $dt = \frac{2x}{x^2-4}dx$.

Lorsque $t = \ln(5)$, $x = \sqrt{4 + e^{\ln(5)}} = \sqrt{9} = 3$ et lorsque $t = \ln(12)$, alors $x = \sqrt{4 + e^{\ln(12)}} = \sqrt{16} = 4$.

Donc

$$\int_{\ln(5)}^{\ln(12)} \sqrt{4 + e^t}dt = \int_3^4 x\frac{2x}{x^2 - 4}dx = \int_3^4 \frac{2x^2}{x^2 - 4}dx$$

b. Comme $2x^2$ est de même degré que $x^2 - 4$, on commence par chercher a, b, c des réels tels que

$$\begin{aligned} 2x^2 &= (a)(x^2 - 4) + (bx + c) \\ &= ax^2 - 4a + bx + c \end{aligned}$$

Par identification, on trouve $a = 2$, $b = 0$ et $c - 4a = 0$. Donc $c = 8$. On en déduit que $2x^2 = 2(x^2 - 4) + 8$. Donc

$$\frac{2x^2}{x^2 - 4} = 2 + \frac{8}{x^2 - 4}$$

Maintenant 8 est de degré strictement inférieur à $x^2 - 4$ donc on cherche la décomposition en éléments simples de la forme suivante : (car $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$ en calculant le discriminant)

$$
\begin{aligned}
\frac{8}{x^2-4} &= \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+2} \\
&= \frac{a(x+2)+b(x-2)}{(x-2)(x+2)} \\
&= \frac{(a+b)x+2a-2b}{x^2-4}
\end{aligned}
$$

Par identification, on en déduit que $a+b=0$ et $2a-2b=8$. Donc $b=-a$ qu'on remplace dans $2a-2b=8$. On trouve $2a-2(-a)=8$. Donc $4a=8$ et $a=2$ et $b=-a=-2$. Donc

$$\frac{8}{x^2-4} = \frac{2}{x-2} - \frac{2}{x+2}$$

Donc

$$\frac{2x^2}{x^2-4} = 2 + \frac{2}{x-2} - \frac{2}{x+2}$$

c. Une primitive est

$$2x + 2\ln(x-2) - 2\ln(x+2)$$

(on ne prend pas les valeurs absolues dans le ln car $x-2$ et $x+2$ sont positifs sur $]2,+\infty[$).

d.

$$
\begin{aligned}
\int_{\ln(5)}^{\ln(12)} \sqrt{4+e^t}dt = \int_3^4 \frac{2x^2}{x^2-4}dx &= [2x]_3^4 + 2[\ln(x-2)]_3^4 - 2[\ln(x+2)]_3^4 \\
&= 2(4-3) + 2(\ln(4-2)-\ln(3-2)) - 2(\ln(4+2)-\ln(3+2)) \\
&= 2 + 2(\ln(2)-\ln(1)) - 2(\ln(6)-\ln(5)) \\
&= 2 + 2\ln(2) + 2\ln(5) - 2\ln(6) \\
&= 2(1+\ln(\frac{2\cdot 5}{6})) \\
&= 2(1+\ln(\frac{5}{3})) \\
&= 2+\ln(\frac{25}{9})
\end{aligned}
$$