# TD9 - Analyse 2

---

**Exercice 1** Calculer les primitives des fonctions suivantes sur leur ensemble de définition :

$$\frac{x\sqrt{x}}{2} \qquad 3x^3+x^2+x \qquad (x+1)(x+2) \qquad \frac{1}{x}-2 \qquad \frac{1}{x^{1/3}}$$

**Exercice 2** Calculer les primitives des fonctions suivantes sur leur ensemble de définition :

$$xe^{x^2} \qquad \frac{1+2x}{(x+x^2)^2} \qquad e^{2x+1} \qquad e^x+e^{-x} \qquad \frac{2x+1}{x^2+x}$$

**Exercice 3** Calculer les primitives suivantes avec la condition demandée :

**a.** La primitive $F$ de $\frac{4}{x\sqrt{x}}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que $F(1)=0$.

**b.** La primitive $F$ de $3x^{4/3}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que $F(2)=2$.

**c.** La primitive $F$ de $2e^{3x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que $F(3)=1$.

**Exercice 4** Calculer les intégrales suivantes : $\int_{-1}^{1} x^3 dx$ et $\int_{-1}^{1} |x^3| dx$.

Calculer $\int_{-1}^{2} |x-1| dx$ après avoir étudié le signe de $x-1$ sur $[-1,2]$.

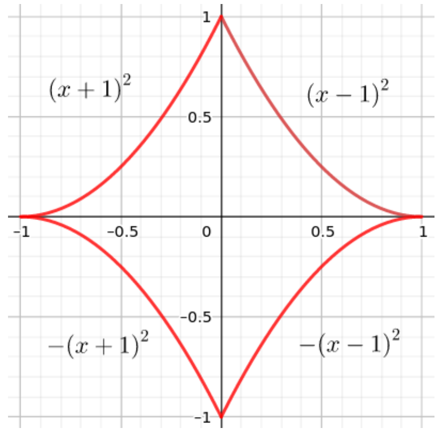
**Exercice 5** Soit $(u_n)$ la suite définie par $u_n=\int_0^1 e^{-nx}\frac{x}{x+2}dx$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

**a.** Montrer que $0\leq e^{-nx}\frac{x}{x+2}\leq e^{-nx}$ pour tout $x\in[0,1]$ et tout $n\in\mathbb{N}$.

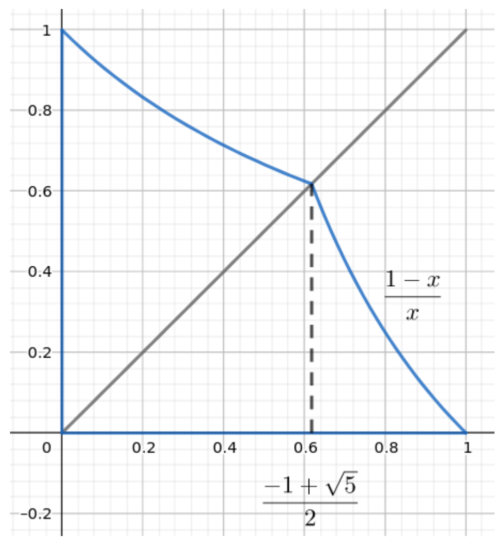
**b.** Calculer $\int_0^1 e^{-nx}dx$.

**c.** En déduire que $(u_n)$ tend vers $0$.

**Exercice 6** Calculer l'aire (au sens géométrique) de la forme décrite par le contour rouge décrit sur l'image suivante. Le contour est décrit par 4 fonctions dont l'expression est donnée sur l'image.




**Exercice 7** Calculer l'aire (au sens géométrique) de la forme décrite par le contour bleu décrit sur l'image suivante en l'exprimant en fonction de $a = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Le contour à droite est décrit par la fonction $\frac{1-x}{x}$ sur $[a, 1]$. Le contour de gauche est obtenue par symétrie axiale par rapport à la première bissectrice (la droite grise $y = x$).




**Exercice 8** On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_n = \int_0^1 \exp(-\frac{x^n}{n})dx$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

**a.** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x^n \leq x$ sur $[0, 1]$.

**b.** En déduire que $\exp(-\frac{x}{n}) \leq \exp(-\frac{x^n}{n}) \leq 1$ pour tout $x \in [0, 1]$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$.

**c.** Calculer $\int_0^1 \exp(-\frac{x}{n})dx$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

**d.** Rappeler le développement limité de $e^x$ en $0$ à l'ordre $1$.

**e.** Déterminer le développement asymptotique de $\exp(-\frac{1}{n})$ à l'ordre $-1$.

**f.** En déduire que $\int_0^1 \exp(-\frac{x}{n})dx$ tend vers $1$ et que $(u_n)$ tend vers $1$.

# TD9 - Analyse 2 - Corrections

---

**Exercice 1** Comme $x\sqrt{x} = x^{3/2}$ et une primitive de $x^{3/2}$ est $\frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} = \frac{2}{5}x^{5/2}$. Alors les primitives de $\frac{x\sqrt{x}}{2}$ sur $\mathbb{R}^+$ sont $\frac{1}{5}x^{5/2} + C = \frac{x^2\sqrt{x}}{5} + C$ avec $C \in \mathbb{R}$.

Les primitives de $3x^3 + x^2 + x$ sur $\mathbb{R}$ sont $\frac{3}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + C$ avec $C \in \mathbb{R}$.

Les primitives de $(x+1)(x+2) = x^2 + x + 2x + 2 = x^2 + 3x + 2$ sur $\mathbb{R}$ sont $\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 2x + C$ avec $C \in \mathbb{R}$.

Les primitives de $\frac{1}{x} - 2$ sur $\mathbb{R}^*$ sont $\ln(|x|) - 2x + C$ avec $C \in \mathbb{R}$.

Les primitives de $\frac{1}{x^{1/3}} = x^{-1/3}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ sont $\frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} + C = \frac{3}{2}x^{2/3}$ avec $C \in \mathbb{R}$.

**Exercice 2** $xe^{x^2}$ est de la forme $u'e^u$ avec $u(x) = x^2$. Donc les primitives sur $\mathbb{R}$ sont $\frac{1}{2}e^{x^2} + C$ avec $C \in \mathbb{R}$.

$\frac{1+2x}{(x+x^2)^2}$ est de la forme $\frac{-u'}{u^2}$ donc les primitives sur $\mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$ sont $-\frac{1}{x+x^2} + C$ avec $C \in \mathbb{R}$.

Les primitives de $e^{2x+1}$ sur $\mathbb{R}$ sont $\frac{1}{2}e^{2x+1} + C$ avec $C \in \mathbb{R}$.

Les primitives de $e^x + e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$ sont $e^x - e^{-x} + C$ avec $C \in \mathbb{R}$.

Les primitives de $\frac{2x+1}{x^2+x}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$ sont $\ln(|x^2 + x|) + C$ avec $C \in \mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

**Exercice 3**

**a.** Les primitives de $\frac{4}{x\sqrt{x}} = 4x^{-1/3}$ sont $4\frac{x^{2/3}}{2/3} = 6x^{2/3} + C$ avec $C \in \mathbb{R}$. La primitive $F$ qui vaut $0$ en $1$ est telle que $61^{2/3} + C = 0$ donc $C = -6$. Donc $F(x) = 6x^{2/3} - 6$.

**b.** Les primitives de $3x^{4/3}$ sont $3\frac{x^{\frac{4}{3}+1}}{\frac{4}{3}+1} + C = 3\frac{3}{7}x^{7/3} = \frac{9}{7}x^{7/3} + C$ avec $C \in \mathbb{R}$. La primitive $F$ qui vaut $2$ en $2$ est telle que $\frac{9}{7}2^{7/3} + C = 2$ donc $C = 2 - \frac{9}{7}2^{7/3}$. Donc $F(x) = \frac{9}{7}x^{7/3} + 2 - \frac{9}{7}2^{7/3}$.

**c.** Les primitives de $2e^{3x}$ sont $2\frac{1}{3}e^{3x} + C$ avec $C \in \mathbb{R}$. La primitive $F$ qui vaut $1$ en $3$ est telle que $\frac{2}{3}e^{3\cdot 3} + C = 1$ donc $C = 1 - \frac{2}{3}e^9$. Donc $F(x) = \frac{2}{3}e^{3x} + 1 - \frac{2}{3}e^9$.

**Exercice 4** $\int_{-1}^{1} x^3 dx = [\frac{x^4}{4}]_{-1}^{1} = \frac{1^4}{4} - \frac{(-1)^4}{4} = 1/4 - 1/4 = 0.$

$\int_{-1}^{1} |x^3| dx = \int_{-1}^{0} -x^3 dx + \int_0^1 x^3 dx = -\int_{-1}^{0} x^3 dx + [\frac{x^4}{4}]_0^1 = -[\frac{x^4}{4}]_{-1}^{0} + (1/4 - 0/4) = -(0/4 - 1/4) + 1/4 = 2/4 = 1/2.$

$x - 1$ est négatif sur $[-1, 1]$ et positif sur $[1, 2]$. Donc $|x - 1| = -(x - 1)$ sur $[-1, 1]$ et $|x - 1| = x - 1$ sur $[1, 2]$. Donc

$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^{2} |x-1| dx &= \int_{-1}^{1} |x-1| dx + \int_{1}^{2} |x-1| dx \\
&= \int_{-1}^{1} -(x-1) dx + \int_{1}^{2} (x-1) dx \\
&= -[\frac{x^2}{2} - x]_{-1}^{1} + [\frac{x^2}{2} - x]_1^2 \\
&= -(1/2 - 1 - ((-1)^2/2 - (-1))) + (2^2/2 - 2 - (1^2/2 - 1)) \\
&= -(1/2 - 1 - (1/2 + 1)) + (4/2 - 2 - (1/2 - 1)) \\
&= -(1/2 - 1 - 1/2 - 1) + (2 - 2 - 1/2 + 1) \\
&= -(-2) + (1/2) = 2 + 1/2 = 5/4
\end{aligned}
$$

**Exercice 5**

**a.** Comme $x \geq 0$, alors $0 \leq \frac{x}{x+2}$. Donc $0 \leq e^{-nx}\frac{x}{x+2}$.
Comme $x \leq x + 2$ (pour tout $x \in [0, 2]$), alors $\frac{x}{x+2} \leq 1$. Donc $e^{-nx}\frac{x}{x+2} \leq e^{-nx}$.
Donc $0 \leq e^{-nx}\frac{x}{x+2} \leq e^{-nx}$.

**b.** $\int_0^1 e^{-nx} dx = [\frac{1}{-n} e^{-nx}]_0^1 = \frac{1}{-n} e^{-n} - \frac{1}{-n} = \frac{1}{n} - \frac{e^{-n}}{n}.$

**c.** D'après (a), on en déduit que $\int_0^1 0 dx \leq \int_0^1 e^{-nx}\frac{x}{x+2} dx \leq \int_0^1 e^{-nx} dx$. Donc $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n} - \frac{e^{-n}}{n}$. Or $1/n$ tend vers $0$ et $e^{-n}$ tend vers $0$. Donc $\frac{1}{n} - \frac{e^{-n}}{n}$ tend vers $0$. Par le théorème des gendarmes on en déduit que $(u_n)$ tend vers $0$.

**Exercice 6** Il suffit de calculer l'aire sous la courbe du coin haut droit et multiplier par $4$ pour obtenir l'aire totale par symétrie.

$$\int_0^1 (x-1)^2 dx = \int_0^1 x^2 - 2x + 1 dx = [\frac{x^3}{3} - 2\frac{x^2}{2} + x]_0^1 = 1^3/3 - 21^2/2 + 1 - (0^3/3 - 2 \cdot 0^2/2 + 0) = 1/3 - 1 + 1 = 1/3$$

Donc l'aire totale vaut $\frac{4}{3}$.

**Exercice 7** On commence par calculer l'aire sous la courbe de $\frac{1-x}{x}$ sur $[a, 1]$.

$$\begin{aligned}\int_a^1 \frac{1-x}{x}dx &= \int_a^1 \frac{1}{x}dx - \int_a^1 1dx \\ &= [\ln(x)]_a^1 - (1-a) \\ &= \ln(1) - \ln(a) - 1 + a \\ &= 0 - \ln(a) - 1 + a = a - \ln(a) - 1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} - \ln(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}) - 1\end{aligned}$$

La surface totale est composée de deux fois l'aire précédente (par symétrie axiale par rapport à la première bissectrice) et d'un carré de côté de longeur $a$.

Donc
$$A = 2(a - \ln(a) - 1) + a^2 = a^2 + 2a - 2 - 2\ln(a)$$

**Exercice 8**

**a.** Soit $x \in [0,1]$. Montrons par récurence que $x^n \leq x$ pour tout $n \geq 1$. On pose $(H_n)$ l'assertion $x^n \leq x$ pour $n \geq 1$.

$(H_1)$ est vraie car $x^1 \leq x$

Supposons que $(H_n)$ soit vraie et démontrons que $(H_{n+1})$ soit vraie. Comme $(H_n)$ est vraie, alors $x^n \leq x$. Donc $x^n \leq x \leq 1$ car $x \in [0,1]$. Donc $x^n \leq 1$. Ainsi $x^n \cdot x \leq x$ car $x \geq 0$. On en déduit que $x^{n+1} \leq x$. Ainsi $(H_{n+1})$ est vraie.

Par récurrence on en déduit que $(H_n)$ est vraie pour tout $n \geq 1$. On conclut que $x^n \leq x$ pour tout $x \in [0,1]$ et $n \geq 1$.

**b.** Comme $x^n \leq x$, alors $-x^n \geq -x$, alors $\frac{-x^n}{n} \geq \frac{-x}{n}$. Comme $\exp$ est croissante on en déduit que $\exp(\frac{-x^n}{n}) \geq \exp(\frac{-x}{n})$. De plus comme $-x^n/n \leq 0$, on en déduit que $\exp(-\frac{x^n}{n}) \leq 1$. Ainsi $\exp(\frac{-x}{n}) \leq \exp(\frac{-x^n}{n}) \leq 1$.

**c.** $\int_0^1 \exp(\frac{-x}{n})dx = [\frac{1}{-1/n}\exp(\frac{-x}{n})]_0^1 = -n[\exp(\frac{-x}{n})]_0^1 = -n(\exp(\frac{-1}{n}) - 1) = n(1 - \exp(-1/n))$

**d.** $e^x = 1 + x + o(x)$

**e.** Comme $-1/n$ tend vers $0$, on peut remplacer $x$ par $-1/n$ dans le DL précédent. Donc $\exp(-1/n) = 1 + \frac{-1}{n} + o(\frac{1}{n})$.

**f.** $\int_0^1 \exp(-\frac{x}{n})dx = n(1-\exp(-1/n)) = n(1-(1-\frac{1}{n}+o(\frac{1}{n}))) = n(1-1+\frac{1}{n}+o(\frac{1}{n}) = n(\frac{1}{n}+o(\frac{1}{n}) = 1 + o(1)$.

Or $o(1)$ tend vers $0$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$. Donc on en déduit que $\int_0^1 \exp(-\frac{x}{n})dx$ tend vers $1$.

D'après (b), on déduit que $\int_0^1 \exp(-\frac{x}{n})dx \leq u_n \leq \int_0^1 1dx = 1$. Par le théorème des gendarmes, on en déduit que $(u_n)$ tend vers $1$.