TD8 - Analyse 2

Exercice 1 Calculer les développements en séries entières des fonctions suivantes :

$$\ln(1-x) \qquad 2e^x \qquad \frac{2}{1-x}+e^x \qquad xe^x \qquad \frac{e^x+e^{-x}}{2} \qquad \ln(1-2x)-\ln(1+x)$$

Exercice 2 Calculer les sommes des séries suivantes :

a. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n}{n} x^n$ pour $|x|<1$.

b. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n$ pour $|x|<1$.

c. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n+1}{n} x^n$ pour $|x|<1$.

d. $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{3(-1)^n}{n} x^n$ pour $|x|<1$.

Exercice 3 Démontrer que $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$. Calculer la dérivée des deux expressions précédentes. En déduire le développement en série entière de la dérivée de fonction de gauche.

Faire de même à partir de $\exp(3x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{n!} x^n$.

Faire de même à partir de $\ln(1-3x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-3^n}{n} x^n$.

Exercice 4 Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence 1. Démontrer que si la somme f de la série entière est paire (c'est à dire $f(x)=f(-x)$ pour tout $x \in]-1,1[$), alors $a_{2n+1}=0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5 Calculer $f(0)$, $f'(0)$ et $f''(0)$ où f est la somme des séries entières suivantes :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \ln(1+n) x^n \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2+n}{1+n^2} x^n$$

Exercice 6 La loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ est une variable aléatoire, notée X dont la loi de probabilité est définie par : $\mathbb{P}(X = n) = \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a. Calculer la fonction génératrice $G_X(t)$.

b. Calculer le rayon de convergence de la série entière précédente. Vérifier que $R > 1$.

c. Vérifier que $G_X(1) = 1$.

d. Dériver $G_X(t)$.

e. En déduire l'espérance de X.

TD8 - Analyse 2 - Corrections

Exercice 1

a. $\ln(1-x)$.

Comme $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$. Alors par substitution en remplaçant x par $-x$ on trouve :

$$\ln(1-x) = \ln(1+(-x)) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(-x)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}\cdot(-1)^n}{n} x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-1}{n} x^n$$

b. $2e^x$.

$$2e^x = 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{n!} x^n$$

c. $\frac{2}{1-x} + e^x$.

$$\frac{2}{1-x} + e^x = 2\sum_{n=0}^{+\infty} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (2 + \frac{1}{n!}) x^n$$

d. xe^x.

$$xe^x = x\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} x^n$$

Il faut penser à faire le décalage d'indice pour avoir une série de la forme $\sum a_n x^n$ (et pas x^{n+1}).

e. $\frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}(-x)^n) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} (\frac{1}{n!} + \frac{(-1)^n}{n!}) x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1+(-1)^n}{2n!} x^n$$

f. $\ln(1-2x) - \ln(1-x)$.

$$\ln(1-2x) - \ln(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}(2x)^n - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n 2^n - (-1)^n}{n} x^n$$

Exercice 2

a.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n}{n} x^n = -2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = -2\ln(1+x)$$

b.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}(-x)^n = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(-x)^n = -\ln(1+(-x)) = -\ln(1-x)$$

c.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n+1}{n} x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n} x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}(-2x)^n - \ln(1-x)$$

$$= -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(-2x)^n - \ln(1-x) = -\ln(1+(-2x)) - \ln(1-x) = -\ln(1-2x) - \ln(1-x)$$

d.

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{3(-1)^n}{n} x^n = -(\frac{3(-1)^1}{1} x^1) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3(-1)^n}{n} x^n = 3x - 3\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = 3x - 3\ln(1+x)$$

Exercice 3

a. Par substitution :

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-x)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n$$

La dérivée de $\frac{1}{1+x}$ vaut $\frac{-u'}{u^2} = \frac{-1}{(1+x)^2}$.

La dérivée de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n$ est : $\sum_{n=1}^{+\infty} n(-1)^n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)(-1)^{n+1}x^n$.

Donc

$$\frac{-1}{(1+x)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)(-1)^{n+1}x^n$$

b. Par substitution :

$$\exp(3x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}(3x)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{n!}x^n$$

La dérivée de $\exp(3x)$ vaut $3\exp(3x)$.
La dérivée de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{n!}x^n$ vaut $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n3^n}{n!}x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)3^{n+1}}{(n+1)!}x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{33^n}{n!}x^n$.
Donc

$$3\exp(3x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{33^n}{n!}x^n$$

c. Par substitution

$$\ln(1-3x) = \ln(1+(-3x)) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}(-3x)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}(-3)^n}{n}x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-3^n}{n}x^n$$

La dérivée de $\ln(1-3x)$ vaut $\frac{-(-3)}{1-3x} = \frac{3}{1-3x}$.
La dérivée de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-3^n}{n}x^n$ vaut $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-n3^n}{n}x^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} -3^n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} -3^{n+1}x^n$.
On en déduit que

$$\frac{3}{1-3x} = \sum_{n=0}^{+\infty} -3^{n+1}x^n$$

Exercice 4 Comme $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ pour tout $x \in]-1,1[$, alors $f(-x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(-x)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(-1)^n x^n$ pour tout $x \in]-1,1[$. Par unicité du DSE, on en déduit que $a_n = a_n(-1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En particulier pour tout $n = 2m+1$ impair : $a_{2m+1} = a_{2m+1}(-1)^{2m+1} = -a_{2m+1}$. Donc $2a_{2m+1} = 0$ et $a_{2m+1} = 0$ pour tout $m \in \mathbb{N}$.

Exercice 5 On utilise la formule $f^{(n)}(0) = a_n n!$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a. $f(0) = \ln(1+0)\cdot 0! = \ln(1) = 0$.
$f'(0) = \ln(1+1)\cdot 1! = \ln(2)$.
$f''(0) = \ln(1+2)\cdot 2! = 2\ln(3)$.

b. $f(0) = \frac{2+0}{1+0^2}\cdot 0! = \frac{2}{1+1} = 1$.
$f'(0) = \frac{2+1}{1+1^2}\cdot 1! = \frac{3}{2}$.
$f''(0) = \frac{2+2}{1+2^2}\cdot 2! = \frac{4}{5}\cdot 2 = \frac{8}{5}$.

Exercice 6

a.

$$G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}t^n = e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}(\lambda t)^n = e^{-\lambda}e^{\lambda t} = \exp(\lambda(t-1))$$

b. On pose $a_n = \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}$. Alors

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\lambda^{n+1} e^{-\lambda}}{(n+1)!} \frac{n!}{\lambda^n e^{-\lambda}} = \frac{\lambda}{n+1} \to 0$$

Donc le rayon vaut $1/0 = +\infty$.

c.

$$G_X(1) = \exp(\lambda(1-1)) = \exp(0) = 1$$

d.

$$G'_X(t) = \lambda \exp(\lambda(t-1))$$

e.

$$G'_X(1) = \lambda \exp(\lambda(1-1)) = \lambda \exp(0) = \lambda$$