TD7 - Analyse 2

Exercice 1 Calculer la somme de la série $\sum_{n\geq 0} \frac{n}{(n+1)!}$ en utilisant une série téléscopique. (Indication écrire que $n = (n+1) - 1$).

Exercice 2 Calculer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$\sum \frac{n+1}{n} x^n \qquad \sum n! x^n \qquad \sum \frac{e^n}{n} x^n \qquad \sum \frac{n}{(n+1)^2} x^n \qquad \sum \frac{2^n}{3^n} x^n$$

Exercice 3 Calculer les sommes des séries suivantes :

a. $\sum_{n=0}^{+\infty} (\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}) x^n$ pour $|x| < 2$.

b. $\sum_{n=0}^{+\infty} (1 - (-1)^n) x^n$ pour $|x| < 1$.

c. $\sum_{n=1}^{+\infty} 2x^n$ pour $|x| < 1$.

d. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n+1}{3^n} x^n$ pour $|x| < 3/2$.

e. $\sum_{n=1}^{+\infty} (4^n + 2) x^n$ pour $|x| < 1/4$.

Exercice 4 Sachant que $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, calculer les sommes des séries suivantes :

a. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n!} x^n$ pour $x \in \mathbb{R}$.

b. $\sum_{n=0}^{+\infty} (2^n + \frac{1}{n!}) x^n$ pour $|x| < 1/2$.

c. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n+1}{n!} x^n$ pour $x \in \mathbb{R}$.

d. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{n!} x^n$ pour $x \in \mathbb{R}$.

TD7 - Analyse 2 - Corrections

Exercice 1 Comme
$$\frac{n}{(n+1)!} = \frac{n+1-1}{(n+1)!} = \frac{n+1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$$
car $(n+1)! = (n+1)n!$. Ainsi le terme général $u_n = \frac{n}{(n+1)!}$ est de la forme $a_n - a_{n+1}$ avec $a_n = \frac{1}{n!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme a_n tend vers 0 (car $0 \leq \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{n}$). Donc d'après le théorème des séries téléscopiques :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)!} = a_0 - \lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{1}{0!} - 0 = 1$$

Exercice 2

a. $a_n = \frac{n+1}{n}$. Donc $a_{n+1} = \frac{n+1+1}{n+1} = \frac{n+2}{n+1}$. Donc
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{n+2}{n+1}}{\frac{n+1}{n}} = \frac{(n+2)n}{(n+1)^2} = \frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}$$
D'après la règle des limites des fractions de polynômes, a_{n+1}/a_n a la même limite que n^2/n^2 qui vaut 1. Donc a_{n+1}/a_n tend vers 1 et donc $R = 1/1 = 1$.

b. $a_n = n!$ et $a_{n+1} = (n+1)!$. Donc
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{n!} = (n+1)$$
car $(n+1)! = (n+1)n!$. Donc a_{n+1}/a_n tend vers $+\infty$. Donc $R = 1/+\infty = 0$.

c. $a_n = \frac{e^n}{n}$ et $a_{n+1} = \frac{e^{n+1}}{n+1}$. Donc
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{e^{n+1}}{n+1}}{\frac{e^n}{n}} = \frac{e^{n+1}n}{e^n(n+1)} = \frac{en}{n+1}$$
Par la règle de la limite des fractions de polynômes, a_{n+1}/a_n a la même limite que en/n qui vaut e. Donc a_{n+1}/a_n tend vers e. Donc $R = 1/e = e^{-1}$.

d. $a_n = \frac{n}{(n+1)^2}$ et $a_{n+1} = \frac{n+1}{(n+1+1)^2} = \frac{n+1}{(n+2)^2}$. Donc
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{n+1}{(n+2)^2}}{\frac{n}{(n+1)^2}} = \frac{(n+1)(n+1)^2}{(n+2)^2 n} = \frac{(n+1)(n^2+2n+1)}{(n^2+4n+4)n}$$
$$= \frac{n^3+2n^2+n+n^2+2n+1}{n^3+4n^2+4n} = \frac{n^3+3n^2+3n+1}{n^3+4n^2+4n}$$
Par la règle de la limite des fractions de polynômes, a_{n+1}/a_n a la même limite que n^3/n^3 qui vaut 1. Donc a_{n+1}/a_n tend vers 1. Donc $R = 1/1 = 1$.

e. $a_n = \frac{2^n}{3^n}$ et $a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{3^{n+1}}$. Donc

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{2^{n+1}}{3^{n+1}}}{\frac{2^n}{3^n}} = \frac{2^{n+1}3^n}{3^{n+1}2^n} = \frac{2}{3}$$

Donc a_{n+1}/a_n tend vers $2/3$. Donc $R = 1/(2/3) = 3/2$.

Exercice 3

a.

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n})x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n}x^n + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{3^n}x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(\frac{x}{2})^n + \sum_{n=0}^{+\infty}(\frac{x}{3})^n = \frac{1}{1-\frac{x}{2}} + \frac{1}{1-\frac{x}{3}}$$

On a le droit de remplacer $\sum_{n=0}^{+\infty}(\frac{x}{2})^n$ par $\frac{1}{1-\frac{x}{2}}$ car $|\frac{x}{2}| < 1$ car $|x| < 2$. Pareil pour la deuxième série.

b.

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(1-(-1)^n)x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}x^n - \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n = \frac{1}{1-x} - \sum_{n=0}^{+\infty}(-x)^n = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-(-x)} = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x}$$

Les formules sont valides car $|x| < 1$.

c.

$$\sum_{n=1}^{+\infty}2x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}2x^{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty}2xx^n = 2x\sum_{n=0}^{+\infty}x^n = 2x\frac{1}{1-x}$$

en utilisant un décalage d'indice.

d.

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n+1}{3^n}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n}{3^n}x^n + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{3^n}x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(\frac{2x}{3})^n + \sum_{n=0}^{+\infty}(\frac{x}{3})^n = \frac{1}{1-\frac{2x}{3}} + \frac{1}{1-\frac{x}{3}}$$

e.

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(4^n+2)x^n = \sum_{n=1}^{+\infty}4^n x^n + \sum_{n=1}^{+\infty}2x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(4x)^{n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty}2x^{n+1}$$

$$= 4x\sum_{n=0}^{+\infty}(4x)^n + 2x\sum_{n=0}^{+\infty}x^n = 4x\frac{1}{1-4x} + 2x\frac{1}{1-x}$$

Exercice 4

a.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} (2x)^n = e^{2x}$$

b.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (2^n + \frac{1}{n!}) x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (2x)^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n = \frac{1}{1-2x} + e^x$$

c.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n+1}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} (2x)^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n = e^{2x} + e^x$$

d. La méthode du décalage d'indice ne fonctionne pas :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3}{(n+1)!} x^{n+1}$$

car on se retrouve avec un $(n+1)!$ qui ne correspond pas au $n!$ qu'on devrait trouver pour utiliser la formule de e^x.

Pour calculer la série, on écrit la somme à partir de 0 car là on sait faire :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3}{n!} x^n = 3 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n = 3e^x$$

Or

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3}{n!} x^n = \frac{3}{0!} x^0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{n!} x^n = 3 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{n!} x^n$$

Donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3}{n!} x^n - 3 = 3e^x - 3$$