TD6 - Analyse 2

Exercice 1 Décomposer en facteurs irréductibles les polynômes suivants :

a. $x^3 + x - 2$ sachant que 1 est racine.

b. $x^3 + 2x^2 + 3x + 2$ sachant que -1 est racine.

c. $x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 2x + 3$ sachant que -1 est une racine double (c'est-à-dire racine du polynôme et du polynome obtenu après factorisation par $(x + 1)$).

Exercice 2 Soient P et Q deux polynômes qui ont tous les deux un nombre $a \in \mathbb{R}$ comme racine. Démontrer que a est aussi racine de $P + Q$.

Exercice 3 Calculer les décompositions en éléments simples des fractions rationnelles suivantes :

$$\frac{1}{x(x+3)} \qquad \frac{1}{x^2 - 3x + 2} \qquad \frac{1}{x(x^2+2)} \qquad \frac{1}{x^2(x-1)}$$

Exercice 4 Soit a et b deux nombres réels distincts. On considère la fraction rationnelle $F(x) = \frac{1}{(x-a)(x-b)}$. Calculer la décomposition en éléments simples de $F(x)$.

Exercice 5 Calculer les sommes suivantes en utilisant la méthode de décomposition en éléments simples :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + 5n + 6} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$$

TD6 - Analyse 2 - Corrections

Exercice 1

a. Comme 1 est racine, alors on cherche a, b, c des réels tels que

$$\begin{aligned} x^3 + x - 2 &= (x-1)(ax^2 + bx + c) \\ &= ax^3 + bx^2 + cx - ax^2 - bx - c \\ &= ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c \end{aligned}$$

En identifiant, on obtient le sytème suivant :

$$\begin{cases} a & = 1 \\ -a + b & = 0 \\ \quad - b + c & = 1 \\ \qquad - c & = -2 \end{cases}$$

Qui se résoud en :

$$\begin{cases} a & = 1 \\ \quad b & = 1 \\ \qquad c & = 2 \end{cases}$$

On en déduit que

$$x^3 + x - 2 = (x-1)(x^2 + x + 2)$$

Or le discriminant de $x^2 + x + 2$ vaut $1^2 - 4(2)(1) = -7$ qui est < 0. Donc la factorisation précédente est bien la décomposition en facteurs irréductibles (car c'est le produit de polynomes de degré 1 et de polynomes de degré 2 avec un discriminant < 0).

b. Comme -1 est racine, alors on cherche a, b, c des réels tels que

$$\begin{aligned} x^3 + 2x^2 + 3x + 2 &= (x - (-1))(ax^2 + bx + c) \\ &= (x+1)(ax^2 + bx + c) \\ &= ax^3 + bx^2 + cx + ax^2 + bx + c \\ &= ax^3 + (b+a)x^2 + (c+b)x + c \end{aligned}$$

En identifiant, on obtient le sytème suivant :

$$\begin{cases} a & = 1 \\ a + b & = 2 \\ \quad b + c & = 3 \\ \qquad c & = 2 \end{cases}$$

Qui se résoud en :

$$\begin{cases} a & & & = 1 \\ & b & & = 1 \\ & & c & = 2 \end{cases}$$

On en déduit que

$$x^3 + x - 2 = (x+1)(x^2 + x + 2)$$

Or le discriminant de $x^2 + x + 2$ vaut $1^2 - 4(2)(1) = -7$ qui est < 0. Donc la factorisation précédente est bien la décomposition en facteurs irréductibles (car c'est le produit de polynomes de degré 1 et de polynomes de degré 2 avec un discriminant < 0).

c. Comme -1 est racine, alors on cherche a, b, c, d des réels (il en faut 4 car on cherche un polynome de degré 3) tels que

$$\begin{aligned} x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 2x + 3 &= (x - (-1))(ax^3 + bx^2 + cx + d) \\ &= (x+1)(ax^3 + bx^2 + cx + d) \\ &= ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + ax^3 + bx^2 + cx + d \\ &= ax^4 + (b+a)x^3 + (c+b)x^2 + (cx + d) + d \end{aligned}$$

En identifiant, on obtient le sytème suivant :

$$\begin{cases} a & & & & = 1 \\ a + b & & & & = -2 \\ & b + c & & & = -4 \\ & & c + d & & = 2 \\ & & & d & = 3 \end{cases}$$

Qui se résoud en :

$$\begin{cases} a & & & & = 1 \\ & b & & & = -3 \\ & & c & & = -1 \\ & & & d & = 3 \end{cases}$$

On en déduit que $x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 2x + 3 = (x+1)(x^3 - 2x^2 - x + 3)$. Il ne s'agit pas de la décomposition en irréductibles car $x^3 - 3x^2 - x + 3$ est de degré 3.

Comme -1 est une racine double, alors -1 est une racine de $x^3 - 3x^2 - x + 3$. Ainsi on cherche a, b, c des réels tels que

$$\begin{aligned} x^3 - 3x^2 - x + 3 &= (x - (-1))(ax^2 + bx + c) \\ &= (x+1)(ax^2 + bx + c) \\ &= ax^3 + bx^2 + cx + ax^2 + bx + c \\ &= ax^3 + (b+a)x^2 + (c+b)x + c \end{aligned}$$

En identifiant, on obtient le sytème suivant :

$$\begin{cases} a & = 1 \\ a + b & = -3 \\ \quad b + c & = -1 \\ \qquad c & = 3 \end{cases}$$

Qui se résoud en :

$$\begin{cases} a & = 1 \\ \quad b & = -4 \\ \qquad c & = 3 \end{cases}$$

On en déduit que $x^3 - 3x^2 - x + 3 = (x+1)(x^2 - 4x + 3)$. Donc

$$x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 2x + 3 = (x+1)(x+1)(x^2 - 4x + 3)$$

Or le discriminant de $x^2 - 4x + 3$ vaut $(-4)^2 - 4(1)(3) = 16 - 12 = 4$ qui est strictement positif. Les racines de ce polynôme sont donc $r_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-4)+\sqrt{4}}{2*1} = \frac{4+2}{2} = 3$ et $r_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-4)-\sqrt{4}}{2*1} = \frac{4-2}{2} = \frac{2}{2} = 1$. Ainsi on a $x^2 - 4x + 3 = (x - r_1)(x - r_2) = (x-3)(x-1)$.

Finalement on a :

$$x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 2x + 3 = (x+1)(x+1)(x-3)(x+1)$$

Il s'agit bien de la décomposition en facteurs irréductibles.

Exercice 2 On rappelle que $a \in \mathbb{R}$ est une racine d'un polynôme $P(x)$ si et seulement si $P(a) = 0$.

Ainsi pour montrer que a est racine de $P(x) + Q(x)$ il faut remplacer x par a et trouver 0 :

$$P(a) + Q(a) = 0 + 0 = 0$$

Donc a est racine de $P(x) + Q(x)$.

Exercice 3

a. Le polynôme $x(x+3)$ est déjà décomposé en facteurs irréductibles. Pour chaque facteur on crée une fraction avec une inconnue pour cherche la décomposition en éléments simples. Ce qui donne :

$$\frac{1}{x(x+3)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+3}$$

On met les fractions au même dénominateur :

$$\begin{aligned} \frac{1}{x(x+3)} &= \frac{a(x+3)}{x(x+3)} + \frac{bx}{x(x+3)} = \frac{a(x+3) + bx}{x(x+3)} \\ &= \frac{ax + 3a + bx}{x(x+3)} = \frac{(a+b)x + 3a}{x(x+3)} \end{aligned}$$

Par identification on déduit que $a+b=0$ et $3a=1$. D'où $a=1/3$ et $b=-1/3$. On conclut que

$$\frac{1}{x(x+3)} = \frac{1/3}{x} + \frac{-1/3}{x+3} = \frac{1}{3x} - \frac{1}{3(x+3)}$$

b. Comme le discriminant de x^2-3x+2 vaut $(-3)^2-4(1)(2)=9-8=1$ et est ≥ 0 on en déduit qu'il y a deux racines : $r_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3)+\sqrt{1}}{2*1} = \frac{3+1}{2} = 2$ et $r_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3)-\sqrt{1}}{2*1} = \frac{3-1}{2} = 1$. Donc $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$. Il s'agit là de la décomposition en facteurs irréductibles.

On cherche maintenant la décomposition en éléments simples en introduisant une fraction par facteur irréductible :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x^2-3x+2} &= \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2} = \frac{a(x-1)}{(x-1)(x-2)} + \frac{b(x-2)}{(x-1)(x-2)} \\
&= \frac{a(x-1)+b(x-2)}{(x-1)(x-2)} = \frac{ax-a+bx-2b}{(x-1)(x-2)} \\
&= \frac{(a+b)x-a-2b}{(x-1)(x-2)}
\end{aligned}$$

Par identification on déduit que $a+b=0$ et $-a-2b=1$. Donc $b=-a$. On remplace dans la deuxième équation et on obtient : $-a-2(-a)=1$ d'où $-a+2a=1$ et $a=1$. Ainsi $a=1$ et $b=-1$. On conclut que

$$\frac{1}{x^2-3x+2} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2}$$

c. Le polynôme $x(x^2+2)$ est décomposé en facteurs irréductibles car le discriminant de x^2+2 vaut $0^2-4*1*2=-8<0$. Ainsi on cherche a,b,c des réels tels que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x(x^2+2)} &= \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+2} \\
&= \frac{a(x^2+2)+(bx+c)x}{x(x^2+2)} \\
&= \frac{(a+b)x^2+cx+2a}{x^2+2}
\end{aligned}$$

Par identification des numérateurs on obtient :

$$\begin{cases}
a+b & =0 \\
 c & =0 \\
2a & =1
\end{cases}$$

D'où

$$\begin{cases} a & = 1/2 \\ \quad b & = -1/2 \\ \qquad c = 0 \end{cases}$$

D'où

$$\frac{1}{x(x^2+2)} = \frac{1/2}{x} - \frac{x/2}{x^2+2}$$

d. Le polynome $x^2(x-1)$ est décomposé en facteurs irréductibles : $x \cdot x \cdot (x-1)$. On cherche donc a, b, c des réels tels que :

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2(x-1)} &= \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x-1} \\ &= \frac{ax+b}{x^2} + \frac{c}{x-1} \\ &= \frac{(ax+b)(x-1)+cx^2}{x^2(x-1)} \\ &= \frac{ax^2-ax+bx-b+cx^2}{x^2(x-1)} \\ &= \frac{(a+c)x^2+(b-a)x-b}{x^2(x-1)} \end{aligned}$$

Par identification des numérateurs on obtient :

$$\begin{cases} a \quad + c = 0 \\ -a + b \quad = 0 \\ \quad - b \quad = 1 \end{cases}$$

D'où

$$\begin{cases} a & = -1 \\ \quad b & = -1 \\ \qquad c = 1 \end{cases}$$

On conclut que

$$\frac{1}{x^2(x-1)} = \frac{-1}{x} + \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x-1}$$

Exercice 4 Le polynôme $(x-\alpha)(x-\beta)$ est déjà décomposé en facteurs irréductibles. Pour chaque facteur on crée une fraction avec une inconnue pour cherche la décomposition en éléments simples. Ce qui donne :

$$\frac{1}{(x-\alpha)(x-\beta)} = \frac{a}{x-\alpha} + \frac{b}{x-\beta}$$

On met les fractions au même dénominateur :

$$\frac{1}{((x-\alpha)(x-\beta} = \frac{a(x-\beta)}{(x-\alpha)(x-\beta)} + \frac{b(x-\alpha)}{(x-\alpha)(x-\beta)} = \frac{a(x-\beta)+b(x-\alpha)}{(x-\alpha)(x-\beta)}$$
$$= \frac{ax-a\alpha+bx-b\beta}{(x-\alpha)(x-\beta)} = \frac{(a+b)x-a\alpha-b\beta}{(x-\alpha)(x-\beta)}$$

Par identification on déduit que $a+b=0$ et $-a\alpha-b\beta=1$. D'où $b=-a$ qu'on remplace dans la deuxième équation : $-a\alpha-(-a)\beta=1$. D'om $-a\alpha+a\beta=1$. On factorise par a : $a(-\alpha+\beta)=1$. Comme $\beta\neq\alpha$ on en déduit que $-\alpha+\beta\neq 0$ et qu'on peut donc diviser par cette dernière quantité : $a=1/(\beta-\alpha)$. D'où $b=-1/(\beta-\alpha)=1/(\alpha-\beta)$.

$$\frac{1}{(x-\alpha)(x-\beta)} = \frac{1/(\beta-\alpha)}{x-\alpha} + \frac{1/(\alpha-\beta)}{x-\beta}$$

Exercice 5

a. À partir de la fraction $\frac{1}{n^2+5n+6}$, on étudie la fraction rationnelle $\frac{1}{x^2+5x+6}$ dont on calcule la décomposition en éléments simples.

On commence par factoriser le polynome x^2+5x+6. Son disccriminant vaut $5^2-4*1*6=25-24=1$. D'où les racines sont $r_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-5+\sqrt{1}}{2}=-2$ et $r_2=\frac{-5-\sqrt{1}}{2}=-3$. Ainsi $x^2+5x+6=(x-r_1)(x-r_2)=(x-(-2))(x-(-3))=(x+2)(x+3)$. Il s'agit de la décomposition en facteurs irréductibles. On peut donc maintenant chercher à décomposer la fraction en éléments simples. On cherche a et b deux réels tels que

$$\frac{1}{(x+2)(x+3)} = \frac{a}{x+2}+\frac{b}{x+3}$$
$$= \frac{a(x+3)+b(x+2)}{(x+2)(x+3)}$$
$$= \frac{(a+b)x+3a+2b}{(x+2)(x+3)}$$

Par identifiation entre les numérateurs on obtient le système : $a+b=0$ et $3a+2b=1$. D'où $b=-a$ qu'on remplace dans l'autre équation : $3a+2(-a)=1$. Donc $3a-2a=1$ et $a=1$ Ainsi $b=-1$. On conclut que

$$\frac{1}{x^2+5x+6} = \frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}$$

D'où pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\frac{1}{n^2+5n+6} = \frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}$$

On en déduit que le terme général $u_n=\frac{1}{n^2+5n+6}$ est de la forme a_n-a_{n+1} avec $a_n=\frac{1}{n+2}$ car $a_{n+1}=\frac{1}{(n+1)+2}=\frac{1}{n+3}$ (remplacer n par $(n+1)$). Comme (a_n) tend vers 0, alors d'après le théorème des série téléscopiques :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2+5n+6} = a_0 - \lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{1}{0+2} = \frac{1}{2}$$

b. On pose $u_n = \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$. On cherche à développer la fraction rationnelle $\frac{2x+1}{x^2(x+1)^2}$.

Le polynome $x^2(x+1)^2$ est le produit de polynome de degré 1 : $x \cdot x \cdot (x+1) \cdot (x+1)$ donc on cherche la décomposition en éléments simples sous la forme :

$$\begin{aligned}
\frac{2x+1}{x^2(x+1)^2} &= \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x+1} + \frac{d}{(x+1)^2} \\
&= \frac{ax+b}{x^2} + \frac{c(x+1)+d}{(x+1)^2} \\
&= \frac{(ax+b)(x+1)^2 + (c(x+1)+d)x^2}{x^2(x+1)^2} \\
&= \frac{(ax+b)(x^2+2x+1) + (cx+c+d)x^2}{x^2(x+1)^2} \\
&= \frac{ax^3+2ax^2+ax+bx^2+2bx+b+cx^3+cx^2+dx^2}{x^2(x+1)^2} \\
&= \frac{(a+c)x^3+(2a+b+c+d)x^2+(a+2b)x+b}{x^2(x+1)^2}
\end{aligned}$$

Par identification entre les numérateurs on obtient

$$\begin{cases} a \quad + c = 0 \\ 2a + b + c + d = 0 \\ a + 2b = 2 \\ b = 1 \end{cases}$$

Comme $b = 1$, alors $a + 2b = 2$ donne $a + 2 = 2$ et donc $a = 0$. De plus $a + c = 0$ donc $0 + c = 0$ et donc $c = 0$.

Comme $2a + b + c + d = 0$, alors $2 \cdot 0 + 1 + 0 + d = 0$ donc $d = -1$. Donc

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \\ c = 0 \\ d = -1 \end{cases}$$

On en déduit la décomposition en éléments simples :

$$\frac{2x+1}{x^2(x+1)^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2}$$

D'où

$$u_n = a_n - a_{n+1}$$

avec $a_n = \frac{1}{n^2}$ (car $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2}$). Comme (a_n) tend vers 0, on déduit du théorème des séries téléscopiques que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = a_1 - \lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{1}{1^2} - 0 = 1$$