TD5 - Analyse 2

Exercice 1 On considère la suite (u_n) définie par récurrence : $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = \frac{x}{2}e^{-x} + 1$ et $u_0 \in [0, 2]$.

a. Montrer que $[0, 2]$ est un intervalle stable pour f. En déduire que la suite (u_n) est bornée.

b. Montrer que f est k-contractante avec un $k \in [0, 1[$ à préciser.

c. En déduire que f admet un unique point fixe dans l'intervalle $[0, 2]$ que l'on notera a. Que déduit on aussi pour (u_n) ?

Exercice 2

a. On considère la suite (u_n) définie par la récurrence suivante : $u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + 1$ avec $u_0 = 1$. Déterminer une formule explicite de u_n. Calculer la limite de (u_n).

b. On considère la suite (u_n) définie par la récurrence suivante : $u_{n+1} = 3u_n - 1$ avec $u_0 = 1$. Déterminer une formule explicite de u_n. Calculer la limite de (u_n).

Exercice 3 En utilisant une comparaison de type $u_n \leq v_n$, étudier la nature des séries suivantes :

$$\frac{1}{n(n+1)} \qquad \frac{1}{n^2 2^n} \qquad \frac{1}{n^n} \qquad E(6/n) \qquad \frac{1 + \frac{1}{2^n}}{n}$$

Exercice 4 Trouver un équivalent simples des suites suivantes et en déduire la nature des séries associées :

$$\frac{2^n - 1}{3^n + 1} \qquad \frac{n+1}{n^3 + n + 1} \qquad \frac{1}{nn^{1/n}}$$

Exercice 5 Montrer que les séries suivantes divergent grossièrement :

$$1 + \frac{1}{n^2} \qquad \frac{\ln(1+n)}{\ln(n)} \qquad \frac{n+1}{n+2} \qquad \frac{1}{n^{1/n}}$$

Exercice 6 En utilisant un développement asymptotique déterminer la nature des séries de termes généraux suivants :

$$e^{1/n} - e^{2/n} + \frac{1}{n} \qquad \ln(\frac{n+1}{n+2})$$

Exercice 7 Soit $u_n = \frac{1}{n!}$.

a. Montrer par récurrence que $n! \geq 2^n$ pour tout $n \geq 4$.

b. En déduire que la série des u_n converge.

Exercice 8 Étudier la nature des séries suivantes :

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \qquad (-2)^n \qquad (-1)^n(1 + \frac{1}{n})$$

TD5 - Analyse 2 - Corrections

Exercice 1

a. On étudie les variations de f. La dérivée de f est $f'(x) = \frac{1}{2}e^{-x} - \frac{x}{2}e^{-x} + 0 = \frac{1-x}{2}e^{-x}$. Donc f' est positif sur $[0,1]$ et négatif sur $[1,2]$. Donc f est croissante sur $[0,1]$ et décroissante sur $[1,2]$. On calcule donc $f(0)$, $f(1)$ et $f(2)$ pour déterminer $f([0,2])$. On a $f(0) = 1$, $f(1) = \frac{1}{2e} + 1$ et $f(2) = \frac{1}{e^2} + 1$. Comme $f(1) \simeq 1,18$ et $f(2) = 1,14$. Donc $f([0,2]) = [f(0), f(1)] \subseteq [0,2]$. Donc $[0,2]$ est stable par f.

On en déduit que pour tout n, $u_n \in [0,2]$ car $u_0 \in [0,2]$.

b. On étudie les variations de f'. Comme $f'(x) = \frac{1-x}{2}e^{-x}$, alors $f''(x) = \frac{-1}{2}e^{-x} + \frac{x-1}{2}e^{-x} = \frac{x-2}{2}e^{-x}$. Donc $f''(x)$ est négatif sur $[0,2]$. Donc f' est décroissante sur $[0,2]$. Donc $f'(0) = 1/2$ et $f'(2) = \frac{-1}{2}e^{-2} \simeq -0,068 \geq -1/2$. Donc $|f'(x)| \leq 0,5$ pout tout $x \in [0,2]$. Donc f est $0,5$-contractante.

c. D'après le théorème du point fixe, comme f est contractante et continue, alors f admet un unique point fixe sur $[0,2]$ (qui est attractif). De plus la suite (u_n) converge vers a.

Exercice 2

a. On a $r = r/2 + 1$ donc $r = 2$. Donc $u_n - r$ est une suite géométrique de raison $1/2$. Donc $u_n = r + C\frac{1}{2^n}$. Or $u_0 = r + C$ donc $C = u_0 - r = 1 - 2 = -1$. On en déduit que $u_n = 2 - \frac{1}{2^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi (u_n) converge vers 2.

b. On a $r = 3r + 1$ donc $r = -2$. Donc $u_n - r$ est une suite géométrique de raison 2. Donc $u_n = r + C2^n$. Or $u_0 = r + C$ donc $C = u_0 - r = 1 - (-2) = 3$. On en déduit que $u_n = -2 + 32^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi (u_n) diverge vers $+\infty$.

Exercice 3 $\frac{1}{n}n + 1 \leq \frac{1}{n^2}$ donc la série converge.

$\frac{1}{n^2 2^n} \leq \frac{1}{n^2}$ donc la série converge

$\frac{1}{n^n} \leq \frac{1}{2^n}$ (pour $n \geq 2$) donc la série converge.

$E(6/n) = 0$ pour $n \geq 7$, donc la série converge.

$\frac{1+\frac{1}{2^n}}{n} \geq \frac{1}{n}$ donc la série diverge.

Exercice 4 $\frac{2^n-1}{3^n} \sim (2/3)^n$ donc la série converge.

$\frac{n+1}{n^3+n+1} \sim \frac{1}{n^2}$ donc la série converge.

$\frac{1}{nn^{1/n}} \sim 1$ donc la série diverge. Car $n^{1/n} = \exp(\frac{1}{n}\ln(n)) \to 1$ car $\frac{\ln(n)}{n}$ tend vers 0.

Exercice 5 $1+\frac{1}{n^2}$ tend ver 1.

$\frac{\ln(1+n)}{\ln(n)} = \frac{\ln(n)+\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln(n)} = 1 + \frac{\ln(1+\frac{1}{n}}{\ln(n)}$ tend vers 1 car le deuxième terme tend vers $0/+\infty$.

$\frac{n+1}{n+2}$ tend vers 1.

Comme $n^{1/n}$ tend vers 1, alors $1/n^{1/n}$ tend vers 1.

Exercice 6 $e^{1/n} - e^{2/n} + \frac{1}{n} = -\frac{3}{2}\frac{1}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})$ donc la série converge.

$\ln(\frac{n+1}{n+2}) = \ln(\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}}) = \ln(1+\frac{1}{n}) - \ln(1+\frac{2}{n})$. Or $\ln(1+\frac{1}{n}) = \frac{1}{n} + o(\frac{1}{n})$ et $\ln(1+\frac{2}{n}) = \frac{2}{n} + o(\frac{1}{n})$ donc $\ln(\frac{n+1}{n+2}) = \frac{1}{n} - \frac{2}{n} + o(\frac{1}{n}) = -\frac{1}{n} + o(\frac{1}{n})$. Donc $\ln(\frac{n+1}{n+2}) \sim -\frac{1}{n}$ qui est une divergente. Donc $\ln(\frac{n+1}{n+2})$ est une série divergente.

Exercice 7

a. On pose $H_n : n! \geq 2^n$ pour $n \geq 4$. Comme $4! = 24$ et que $2^4 = 16$, alors H_4 est vraie. On suppose H_n vraie. Comme $(n+1)! = n(n+1) \geq 2^n(n+1)$ et que $n+1 \geq 2$ car $n \geq 4$, alors $(n+1)! \geq 2^n \cdot 2 = 2^{n+1}$. Donc la propriété H_n est vraie pour tout $n \geq 4$.

b. Comme la série des $1/2^n$ converge, alors la série des u_n converge.