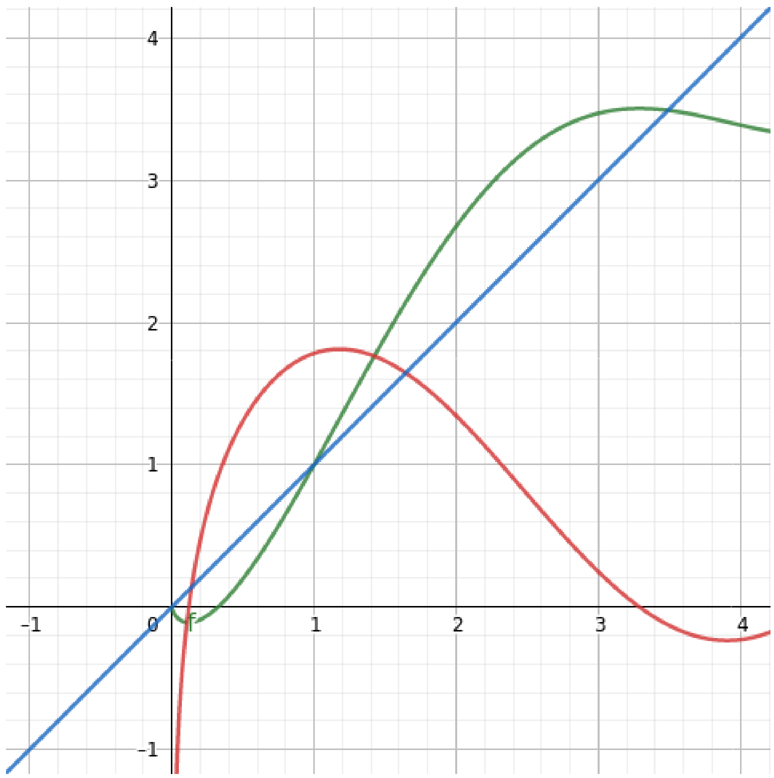
TD4 - Analyse 2

Exercice 1 On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ et dessinée en vert sur le graphique suivant (la courbe rouge est la dérivée de la fonction). On répondra aux questions en justifiant simplement à l'aide du graphique. Quels intervalles parmis les suivants sont stables par cette fonction ?

$$\mathbb{R}, \mathbb{R}^+, [0,1], [1,2], [1,4], [3,4]$$

Pour chacun de ces intervalles stables, la fonction est elle k-contractante avec un $k \in [0,1[$? Pour chacun de ces intervalles stables, donner une valeur approchée des points fixes et dire s'ils sont attractifs, répulsifs ou non.



Exercice 2 Pour chacune de ces fonctions, indiquer si les intervalles proposés sont stables. Pour ces intervalles stables, indiquer si la fonction est k-contractante avec un $k \in [0,1[$ et trouver les points fixes sur cet intervalle et déterminer s'ils sont attractifs ou répulsifs ou non.

- $\sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}^+$ et $[0,1]$
- $2 + \ln(x)$ sur $[2,4]$
- e^{-x^2} sur $\mathbb{R}$ et sur $[-1,1]$.
- $x^2 - x + 1$ sur $[0,1]$

Exercice 3 Déterminer des équivalents des suites suivantes :

$$(n^3+1)^6 \qquad \frac{1+n+n^4}{2-n^3} \qquad \ln(1+\frac{1}{n})$$

Exercice 4 Calculer les développements asymptotiques à l'ordre 2 de :

$$\ln(1+\frac{1}{n}) \qquad n\ln(1+\frac{1}{2n}) \qquad e^{1/n} \qquad \sqrt{1+\frac{1}{n}}$$

À l'aide des développements asymptotiques à l'ordre 2 précédents calculer

$$\lim_{n\to+\infty} n(e^{1/n}-\sqrt{1+\frac{1}{n}}) \qquad \lim_{n\to+\infty} n^2(\ln(1+\frac{1}{n})-2\ln(1+\frac{1}{2n}))$$

Exercice 5

a. Montrer que n^2+n est équivalent à n.

b. Montrer que e^{n^2+n} n'est pas équivalent à e^n.

c. Montrer que e^{u_n} est équivalent à e^{v_n} si et seulement si $u_n - v_n \to 0$ en $+\infty$.

d. Calculer la limite de $(1+\frac{1}{n})^n$. (Indication : montrer que $n\ln(1+\frac{1}{n})$ converge vers 1 et utiliser la question précédente).

Exercice 6 On considère la suite (u_n) définie par récurrence : $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 1$ et $u_0 \in [0,1]$.

a. Montrer que $[0,1]$ est un intervalle stable pour f. En déduire que la suite (u_n) est bornée.

b. Montrer que f est k-contractante avec un $k \in [0,1[$ à préciser.

c. En déduire que f admet un unique point fixe dans l'intervalle $[0,1]$ que l'on notera a. Que déduit on aussi pour (u_n) ?

d. Dans le tableau suivant on a calculé les 21 premières valeurs de la suite (u_n). On a aussi calculé la majoration de $|u_n - a|$ (appelée précision dans le cours) donnée par le théorème du point fixe. Les colonnes un-precision et un+precision donnent l'intervalle dans lequel doit se situer le point fixe.

À partir de quel rang peut on déduire que le point fixe commence par $0,6$? et par $0,64$? Peut-on déduire plus de décimales à l'aide de ces données ?

n	un	precision	un-precision	un+precision
0	0,5000	1,0000	-0,5000	1,5000
1	0,7500	0,7500	0,0000	1,5000
2	0,5781	0,5625	0,0156	1,1406
3	0,6919	0,4219	0,2700	1,1138
4	0,6132	0,3164	0,2967	0,9296
5	0,6666	0,2373	0,4293	0,9039
6	0,6297	0,1780	0,4517	0,8077
7	0,6549	0,1335	0,5214	0,7884
8	0,6375	0,1001	0,5374	0,7376
9	0,6495	0,0751	0,5744	0,7245
10	0,6412	0,0563	0,5849	0,6976
11	0,6469	0,0422	0,6046	0,6891
12	0,6430	0,0317	0,6113	0,6747
13	0,6457	0,0238	0,6219	0,6694
14	0,6438	0,0178	0,6260	0,6617
15	0,6451	0,0134	0,6317	0,6585
16	0,6442	0,0100	0,6342	0,6543
17	0,6448	0,0075	0,6373	0,6523
18	0,6444	0,0056	0,6388	0,6501
19	0,6447	0,0042	0,6405	0,6489
20	0,6445	0,0032	0,6413	0,6477

Figure 1: Valeurs de la suite. Précision du théorème du point fixe. Intervalle du point fixe.

TD4 - Analyse 2 - Corrections

Exercice 1 On résume les différents résultats dans le tableau suivant :

intervalle	stable	k-contractante	points fixes
$\mathbb{R}$	non (car pas défini)		
$\mathbb{R}^+$	non (car $f(0,2) < 0$)		
$[0,1]$	non (car $f(0,2) < 0$)		
$[1,2]$	non (car $f(1,8) > 2$)		
$[1,4]$	oui	non (car $f'(1) > 1$)	1 (répulsif) et 3,5 (attractif)
$[3,4]$	oui	$0,25$-contractante	3,5 (attractif)

Exercice 2

a. Pour $\sqrt{x}$. L'intervalle $\mathbb{R}^+$ est stable car si $x \geq 0$, alors $\sqrt{x} \geq 0$. La fonction n'est pas contractante sur $[0,1]$ car $f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x}}$ tend vers $+\infty$ en 0. Les points fixes solutions de $\sqrt{x} = x$ qui donne $x = x^2$. Donc les points fixes sont 0 et 1 et ils sont bien dans $\mathbb{R}^+$. Le point fixe 0 est répulsif car $|f'(x)|$ tend vers $+\infty$ en 0. Le point fixe 1 est attractif car $|f'(1)| = \frac{1}{2} < 1$.

L'intervalle $[0,1]$ est stable car si $x \in [0,1]$, alors $\sqrt{x} \in [0,1]$ car $\sqrt{x}$ est croissante sur $[0,1]$ et car $\sqrt{0} = 0$ et $\sqrt{1} = 1$. De même que précédement, la fonction n'est pas contractante sur cet intervalle. Les points fixes sont les mêmes.

b. Pour $f(x) = 2 + \ln(x)$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ On commence par étudier les variations de f. Comme $f'(x) = 1/x$, alors f est strictement croissante. Donc $f([2,4]) = [f(2), f(4)]$. Or $f(2) = 2 + \ln(2) \in [2,4]$ et $f(4) = 2 + \ln(4) \in [2,4]$ (avec la calculatrice). Donc $[2,4]$ est stable par f. Les points fixes de $f(x)$ sont des solutions de $2 + \ln(x) = x$. On ne peut pas les trouver algébriquement. Montrons qu'il en existe un unique à l'aide du TVI. On étudie pour cela le signe de $g(x) = f(x) - x$. On trouve les variations de g en dérivant : $g'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$. Donc g est croissante sur $]0,1]$ et décroissante sur $[1,+\infty[$. Or $g(x) = 2+\ln(x)-x$ tend vers $-\infty$ en 0 et $g(1) = 2 + \ln(1) - 1 = 1$ et $g(x)$ tend vers $-\infty$ en $+\infty$ (par croissance comparée). Donc par le TVI, g admet deux zéros : un sur $]0,1[$ et un sur $]1,+\infty[$. Plus exactement comme $g(4) = 2 + \ln(4) - 4 < 0$ (avec la calculatrice), alors le deuxième zéro est sur $]1,4[$. Donc en restriction à $[2,4]$ il n'y a qu'un seul point fixe.

Comme $f'(x) = 1/x$, alors $|f'(x)| \leq 1/2$ sur $[2,4]$. Donc f est $0,5$-contractante sur $[2,4]$. Le point fixe est donc attractif.

c. Pour $f(x) = e^{-x^2}$ (définie sur $\mathbb{R}$). L'intervalle $\mathbb{R}$ est stable par f (car si $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \in \mathbb{R}$). La dérivée vaut : $f'(x) = -2xe^{-x^2}$. Etudions les variations de f'. La dérivée seconde vaut $f''(x) = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} = (4x^2-2)e^{-x^2}$. Donc f' est croissante sur $]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}[$ et sur $]\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty[$ et décroissante sinon. Or $f'(\frac{1}{\sqrt{2}}) = -\frac{2}{\sqrt{2}}e^{-1/2} = -\sqrt{2}e^{-1/2} > -1$ (avec la calculatrice). De même on montre que $f'(-\sqrt{1}\sqrt{2}) < 1$. Donc f' est contractante.

La fonction f admet un unique point fixe qui est attractif. Avec le TVI on peut montrer que ce point fixe est dans $[0,1]$.

d. On étudie les variations de $f(x) = x^2 - x + 1$ sur $[0,1]$: $f'(x) = 2x - 1$ donc f est décroissante sur $[0, 1/2]$ et croissante sur $[1/2, 1]$. Or $f(0) = 1$ et $f(1) = 1$ et $f(1/2) = 3/4$. Donc $f([0,1]) = [3/4, 1] \subseteq [0,1]$ donc $[0,1]$ est stable par f.

Comme $f'(x) = 2x - 1$, alors comme $f'(0) = 1$ on en déduit que f n'est pas contractante.

Les points fixes sont solutions de $f(x) = x$, c'est-à-dire $x^2 - 2x + 1 = 0$. On trouve que 1 est le seul point fixe. Comme $|f'(1)| = -1$, il n'est ni répulsif ni attractif.

Exercice 3 $(n^3+1)^6 \sim n^{18}$

$\frac{1+n+n^4}{2-n^3} \sim n$

$\ln(1+1/n) \sim 1/n$ (car $ln(1+x) \sim x$ en 0).

Exercice 4 Comme $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$ en 0, alors en remplaçant x par $1/n$ (qui est possible car $1/n$ tend vers 0) on obtient :

$$\ln(1+\frac{1}{n}) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2})$$

Comme $\ln(1+\frac{x}{2}) = \frac{x}{2x} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{6*8}o(x^3)$ en 0, alors en remplaçant x par $1/n$ (qui est possible car $1/n$ tend vers 0) on obtient :

$$n\ln(1+\frac{1}{2n}) = n(\frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + \frac{1}{48n^3} + o(\frac{1}{n^3})) = \frac{1}{2} - \frac{1}{8n} + \frac{1}{48n^2} + o(\frac{1}{n^2})$$

Comme $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ en 0, alors en remplaçant x par $1/n$ (qui est possible car $1/n$ tend vers 0) on obtient :

$$e^{1/n} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2})$$

Comme $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$ en 0, alors en remplaçant x par $1/n$ (qui est possible car $1/n$ tend vers 0) on obtient :

$$\sqrt{1+\frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + o(\frac{1}{n^2})$$

Limite 1 : On a :

$$e^{1/n} - \sqrt{1+\frac{1}{n}} = (1+\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}) - (1+\frac{1}{2n}-\frac{1}{8n^2}) + o(\frac{1}{n^2}) = \frac{1}{2n}+\frac{3}{8n^2}+o(\frac{1}{n^2})$$

Donc

$$n(e^{1/n} - \sqrt{1+\frac{1}{n}}) = n(\frac{1}{2n}+\frac{3}{8n^2}+o(\frac{1}{n^2})) = \frac{1}{2}+\frac{3}{8n}+o(\frac{1}{n})$$

Donc la limite vaut $1/2$.

Limite 2: On a

$$\ln(1+\frac{1}{n}) - 2\ln(1+\frac{1}{2n}) = (\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}) - 2(\frac{1}{2n}-\frac{1}{8n^2}) + o(\frac{1}{n^2}) = -\frac{1}{4n^2}+o(\frac{1}{n^2})$$

Donc

$$n^2(\ln(1+\frac{1}{n}) - 2\ln(1+\frac{1}{2n})) = -\frac{1}{4}+o(1)$$

Donc la limite vaut $-\frac{1}{4}$ (car $o(1)$ tend vers 0 en $+\infty$).

Exercice 5.

a. $n^2+n \sim n$ car ce sont des polynômes.

b. $\frac{e^{n^2+n}}{e^n} = e^{n^2}$ ne tend par 1 (mais vers $+\infty$. Donc ils ne sont pas équivalents.

c. Si $u_n - v_n \to 0$ en $+\infty$, alors $e^{u_n-v_n} \to e^0$ en $+\infty$. Donc $\frac{e^{u_n}}{e^{v_n}} \to 1$ et e^{u_n} est équivalent à e^{v_n}.

Si e^{u_n} est équivalent à e^{v_n}, alors $\frac{e^{u_n}}{e^{v_n}} \to 1$ et donc en passant au logarithme, on obtient $\ln(e^{u_n-v_n}) \to \ln(1) = 0$. Donc $u_n - v_n$ tend vers 0.

d. $n\ln(1+\frac{1}{n}) = n(\frac{1}{n}+o(\frac{1}{n})) = 1+o(1)$ (car $\ln(1+x) = x+o(x)$ en 0). Donc la limite est 1.

Donc $n\ln(1+\frac{1}{n})-1$ converge vers 0. Donc d'après ce qui précéde, $e^{n\ln(1+\frac{1}{n})}$ est équivalent à e^1. Or $e^{n\ln(1+\frac{1}{n})} = (1+\frac{1}{n})^n$ donc cela tend vers $e^1 = e$.

Exercice 6

a. On étudie les variations de f sur $[0,1]$. La dérivée vaut $f'(x) = 3x^2-3x = 3x(x-1)$. Donc sur $[0,1]$, f est décroissante. Donc $f([0,1]) = [f(1), f(0)]$. Or $f(0) = 1$ et $f(1) = 1-\frac{3}{2}+1 = \frac{1}{2}$. Comme $f([0,1]) = [0,5;1] \subseteq [0,1]$, alors $[0,1]$ est stable par f.

On en déduit que la suite (u_n) est bien définie et comme $u_0 \in [0,1]$, alors $u_n \in [0,1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc (u_n) est bornée.

b. Comme $f'(x) = 3x^2 - 3x$, alors $f''(x) = 6x - 3$. Donc $f''(x)$ s'annule en $1/2$. Donc f' est décroissante sur $[0, 1/2]$ et croissante sur $[0, 1/2]$. Or $f'(0) = f'(1) = 0$ et $f'(1/2) = \frac{3}{4}$. Donc f est $\frac{3}{4}$-contractante sur $[0, 1]$.

c. D'après le théorème du point fixe, comme f est contractante et continue sur $[0, 1]$, alors f admet un unique point fixe sur $[0, 1]$ que l'on note a. De plus (u_n) converge vers a.

d. La ligne 11 assure que $a \in [0,6046; 0,6891]$ donc a commence par $0,6$. C'est la première ligne à partir de la laquelle on peut déduire cela car les autres intervalles n'ont pas de bornes qui commencent toutes les deux par $0,6$.

Pour $0,64$ c'est $n = 19$.

Non, on ne peut pas déduire plus de décimale de manière sure car on ne voit pas d'intervalle plus précis. On peut quand même suspecter que la limite va commencer par $0,644$ à la vue de u_n pour $n = 17, 18, 19, 20$.