TD3 - Analyse 2

Exercice 1 On considère la suite (u_n) définie par la formule de récurrence $u_{n+1} = u_n u_{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ avec $u_0 = 1,5$ et $u_1 = 2$. Montrer que la suite est croissante. Montrer que la suite diverge vers $+\infty$.

Exercice 2 Montrer que la suite (u_n) définie par la formule de récurrence $u_{n+1} = \ln(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ n'est pas définie à partir d'un certain rang pour $u_0 = e$.

Exercice 3 On considère la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{1}{u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $u_0 = 2$. Montrer que la suite est bien définie. Montrer que la suite converge (sans calculer la limite).

Exercice 4 Montrer par l'absurde que la suite $n(-1)^n$ n'est pas majorée.

Exercice 5 Montrer que la suite $(-1)^n \frac{n}{n+1}$ diverge.

Exercice 6 Montrer que la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = 3u_n(1 - u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $u_0 = 1/2$ admet au moins une valeur d'adhérence. La suite est-elle monotone ?

TD3 - Analyse 2 - Corrections

Exercice 1 Montrons par récurrence que $u_n > 1$. Soit $n \geq 1$, on considère l'assertion P_n : $u_n > 1$ et $u_{n-1} > 1$ Comme $u_0 = 1,5 > 1$ et que $u_1 = 2 > 1$, l'initialisation est vérifiée : P_1 est vraie. Soit $n \geq 1$ tel que P_n soit vraie. Montrons que P_{n+1} est vraie. Comme P_n est vraie, alors $u_n > 1$ et que $u_{n-1} > 1$. Alors $u_{n+1} = u_n u_{n-1} > 1 * 1 = 1$. On en déduit que P_{n+1} est vraie et donc que P_n est vraie pour tout $n \geq 1$. Ainsi $u_{n+1}/u_n = u_{n-1} > 1$ pour tout $n \geq 0$ et on en déduit que la suite est strictement croissante.

Plus précisement, on peut montrer par récurrence que $u_n \geq 2^n$. En effet, comme $u_0 = 1,5 \geq 2^0$ et que $u_1 = 2 \geq 2^1$, l'initialisation est vérifiée. Supposons par hypothèse de récurrence que $u_n \geq 2^n$ et que $u_{n-1} \geq 2^{n-1}$ pour un $n \geq 2$. Alors $u_{n+1} = u_n u_{n-1} \geq 2^n 2^{n-1} = 2^{2n-1} \geq 2^{n+1}$ car $2n - 1 \geq n + 1$ pour $n \geq 2$. On conclut par récurrence que $u_n \geq 2^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi comme 2^n diverge vers $+\infty$, alors u_n diverge vers $+\infty$.

Exercice 2 Comme $u_1 = \ln(e) = 1$ et $u_2 = \ln(u_1) = \ln(1) = 0$, alors on ne peut plus calculer u_3. Donc (u_n) n'est pas définie à partir du rang 3.

Exercice 3 On étudie la fonction $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$. Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}^*$. Sa dérivée est $\frac{1}{2} - \frac{1}{x^2}$. Donc d'après son tableau de variation f est croissante sur $[\sqrt{2}, +\infty[$. Or après calcul, $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$, donc l'intervalle $[\sqrt{2}, +\infty[$ est stable par f. Comme u_0 est dans cet intervalle, alors la suite (u_n) est bien définie.

Etudions maintenant les variations de la suite (u_n). Pour ce faire, on étudie la fonction $g(x) = f(x) - x$ définie sur $[\sqrt{2}, +\infty[$. Sa dérivée est $-\frac{1}{2} - \frac{1}{x^2}$, donc elle est décroissante sur l'intervalle $[\sqrt{2}, +\infty[$. Ainsi $g(x) \leq g(\sqrt{2})$ pour tout $x \geq \sqrt{2}$. Or $g(\sqrt{2}) = 0$ donc $g(x) \leq 0$ pour tout $x \geq \sqrt{2}$. On en déduit que $u_{n+1} \leq u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que la suite est décroissante. La suite (u_n) converge ou diverge vers $-\infty$.

Montrons qu'elle est minorée. Comme $f(x) \geq \sqrt{2}$ pour tout $x \geq \sqrt{2}$ d'après l'étude de la fonction, alors $u_n \geq \sqrt{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc on en conclut que (u_n) est convergente.

Exercice 4 Supposons que la suite (u_n) est majorée. Alors il existerait $M \in \mathbb{R}$, tel que $u_n \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Or $u_{2n} = 2n(-1)^{2n} = 2n$. Donc en considérant $n = E(M) + 1$ (le nombre entier juste au dessus de M, alors on a $n > M$ et donc $2n > M$. Ainsi cela contredit la définition de M. Donc (u_n) n'est pas majorée.

Exercice 5 Trouvons deux valeurs d'adhérence à la suite $u_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}$. On considère la suite extraite des rangs pairs : $u_{2n} = (-1)^{2n} \frac{2n}{2n+1} = \frac{2n}{2n+1}$. Cette suite converge vers 1, donc 1 est une valeur d'ahdérence de (u_n). De même, $u_{2n+1} = (-1)^{2n+1}\frac{2n+1}{2n+2} = -\frac{2n+1}{2n+2}$ converge vers -1 donc -1 est une valeur d'adhérence de (u_n). Ainsi (u_n) diverge car elle possède au moins deux valeurs d'adhérence.

Exercice 6 On étudie la fonction $f(x) = 3x(1-x)$. Montrons que l'intervalle $[0,1]$ est stable. La dérivée de f est $3-6x$. Donc f est croissante sur $[0,1/2]$ et décroissante sur $[1/2,1]$. Or $f(0) = f(1) = 0$ et $f(1/2) = 3/4$ donc $[0,1]$ est stable par f. Ainsi $0 \le u_n \le 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ car $u_0 \in [0,1]$.

$u_1 = 0,75$; $u_2 = 0,5625$; $u_3 = 0,738...$ Donc (u_n) n'est pas monotone.