TD12 - Analyse 2

Exercice 1 Dire, en justifiant, si les fonctions suivantes sont intégrables sur $[1, +\infty[$ en utilisant la méthode des équivalents :

$$\frac{x+1}{2x^2+3}\ln(2+\frac{1}{x}) \qquad \frac{1+x}{x^3+x}\cdot\frac{1}{2+e^{-x}} \qquad \frac{e^x+2}{1+\frac{1}{x}} \qquad \frac{\ln(2+\frac{1}{x})}{x^2+1} \qquad \frac{2^x}{3^{-x}}\frac{x+1}{x}$$

Exercice 2 Dire, en justifiant, si les fonctions suivantes sont intégrables sur $]0, 1]$ en utilisant la méthode des équivalents :

$$\frac{1}{\sqrt{x}}\ln(1+x) \qquad \frac{1}{x}\ln(1+x) \qquad \frac{2+x^2}{x+x^3} \qquad \frac{3+\frac{1}{\sqrt{x}}}{2+x} \qquad \frac{3+\frac{1}{x^2}}{2+\frac{1}{x}} \qquad 5\cdot 2^x 3^{-x}$$

Exercice 3 Montrer que $\ln(1+\frac{1}{2x})-\frac{1}{2x}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ en calculant un développement asymptotique à l'ordre -2 en $+\infty$.

Montrer que $\sqrt{1+\frac{1}{x}}-\sqrt{1+\frac{2}{x}}$ n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$ en calculant un développement asymptotique à l'ordre -1 en $+\infty$.

Exercice 4 Soit f une fonction continue, positive, décroissante et intégrable sur $[0, +\infty[$.

a. Montrer que $f(k+1) \leq f(x)$ pour tout $x \in [k, k+1]$ et tout entier $k \in \mathbb{N}$.

b. Montrer que $f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x)dx$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

c. Montrer que $\sum_{k=0}^n f(k+1) \leq \int_0^{n+1} f(x)dx$ pour tout $n \geq 0$.

d. On note $S_n = \sum_{k=0}^n f(k)$ la somme partielle de la série $\sum f(k)$. Montrer que (S_n) est croissante.

e. Montrer que $S_{n+1} \leq f(0) + \int_0^{n+1} f(x)dx$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

f. Montrer que $\int_0^t f(x)dx \geq \int_0^{n+1} f(x)dx$ à l'aide de la relation de Chasles pour tout $t \geq n+1$. En déduire que $\int_0^{n+1} f(x)dx \leq \int_0^{+\infty} f(x)dx$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

g. Montrer que la série $\sum f(k)$ est convergente.

Exercice 5 On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi exponentielle si sa densité est $f(x) = e^{-x}$ sur $[0, +\infty[$.

a. Montrer que f est intégrable sur $[0, +\infty[$ et calculer $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$.

b. Montrer que X admet une espérance et la calculer.

Exercice 6 On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi de Cauchy si sa densité est $f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}$.

a. Montrer que f est intégrable sur $\mathbb{R}$ (sans calculer la valeur de $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx$).

b. Montrer que X n'admet pas d'espérance (c'est-à-dire que la fonction $xf(x)$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$).

TD12 - Analyse 2 - Corrections

Exercice 1

a. $\frac{x+1}{2x^2+3}\ln(1+\frac{1}{x})$.

Par la règle des équivalents des fractions rationnelles en $+\infty$, $\frac{x+1}{2x^2+3} \sim \frac{x}{2x^2} = \frac{1}{2x}$. De plus $\ln(2+\frac{1}{x})$ tend vers $\ln(2)$ lorsque $x \to +\infty$. Donc $\frac{x+1}{2x^2+3}\ln(1+\frac{1}{x}) \sim \frac{1}{2x}\ln(2)$ qui n'est pas intégrable sur $[1,+\infty[$ (Riemann $a=1$). Donc la fonction $\frac{x+1}{2x^2+3}\ln(1+\frac{1}{x})$ n'est pas intégrable sur $[1,+\infty[$.

b. $\frac{1+x}{x^3+x}\cdot\frac{1}{2+e^{-x}}$.

Par la règle des équivalents des fractions rationnelles en $+\infty$, $\frac{1+x}{x^3+x} \sim \frac{x}{x^3} = \frac{1}{x^2}$. De plus, $2+e^{-x}$ tend vers 2 lorsque $x \to +\infty$. Donc $\frac{1}{2+e^{-x}}$ tend vers $\frac{1}{2}$ lorsque $x \to +\infty$. Donc $\frac{1+x}{x^3+x}\cdot\frac{1}{2+e^{-x}} \sim \frac{1}{x^2}\frac{1}{2}$ qui est intégrable sur $[1,+\infty[$ (Riemann $a=2$). Donc la fonction $\frac{1+x}{x^3+x}\cdot\frac{1}{2+e^{-x}}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$.

c. $\frac{e^x+2}{1+\frac{1}{x}}$.

e^x+2 est équivalent à e^x car $\frac{e^x+2}{e^x} = 1+2e^{-x} \to 1$ lorsque $x \to +\infty$. De plus $1+\frac{1}{x} \to 1$ lorsque $x \to +\infty$, donc $1+\frac{1}{x} \sim 1$. Donc $\frac{e^x+2}{1+\frac{1}{x}} \sim e^x$ lorsque $x \to +\infty$. Comme $e \geq 1$, alors e^x n'est pas intégrable sur $[1,+\infty[$. Donc $\frac{e^x+2}{1+\frac{1}{x}}$ n'est pas intégrable sur $[1,+\infty[$.

d. $\frac{\ln(2+\frac{1}{x})}{x^2+1}$.

$\ln(2+\frac{1}{x})$ tend vers $\ln(2)$ lorsque $x \to +\infty$. De plus $x^2+1 \sim x^2$ lorsque $x \to +\infty$. Donc $\frac{\ln(2+\frac{1}{x})}{x^2+1} \sim \frac{\ln(2)}{x^2}$ lorsque $x \to +\infty$. Donc $\frac{\ln(2+\frac{1}{x})}{x^2+1}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$.

e. $\frac{2^x}{3^{-x}}\frac{x+1}{x}$.

$\frac{2^x}{3^{-x}} = 2^x3^x = 6^x$. De plus $\frac{x+1}{x}$ est équivalent à 1 lorsque $x \to +\infty$. Donc $\frac{2^x}{3^{-x}}\frac{x+1}{x} \sim 6^x$ lorsque $x \to +\infty$. Comme $6 \geq 1$, alors 6^x n'est pas intégrable sur $[1,+\infty[$. Donc $\frac{2^x}{3^{-x}}\frac{x+1}{x}$ n'est pas intégrable sur $[1,+\infty[$.

Exercice 2

a. $\frac{1}{\sqrt{x}}\ln(1+x)$.

Comme $\ln(1+x) \sim x$ lorsque $x \to 0$, alors $\frac{1}{\sqrt{x}}\ln(1+x) \sim \frac{x}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} = \frac{1}{x^a}$ avec $a = -1/2$. Donc $\frac{1}{\sqrt{x}}\ln(1+x)$ n'est pas intégrable sur $]0,1]$.

b. $\frac{1}{x}\ln(1+x)$.

Comme $\ln(1+x) \sim x$ lorsque $x \to 0$, alors $\frac{1}{x}\ln(1+x) \sim \frac{x}{x} = 1 = \frac{1}{x^a}$ avec $a = 0$. Donc $\frac{1}{x}\ln(1+x)$ n'est pas intégrable sur $]0,1]$.

c. $\frac{2+x^2}{x+x^3}$

En 0, $\frac{2+x^2}{x+x^3} \sim \frac{2}{x}$ qui n'est pas intégrable sur $]0,1]$. Donc $\frac{2+x^2}{x+x^3}$ n'est pas intégrable sur $]0,1]$.

d. $\frac{3+\frac{1}{\sqrt{x}}}{2+x}$.

$3+\frac{1}{\sqrt{x}} \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$ lorsque $x \to 0$ car

$$\frac{3+\frac{1}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \sqrt{x}(3+\frac{1}{\sqrt{x}}) = 3\sqrt{x}+1$$

qui tend vers 1 lorsque $x \to 0$. De plus $2+x$ est équivalent à 2 lorsque $x \to 0$. Donc $\frac{3+\frac{1}{\sqrt{x}}}{2+x} \sim \frac{1}{2\sqrt{x}}$ lorsque $x \to 0$. Or $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ est intégrable sur $]0,1]$ donc $\frac{3+\frac{1}{\sqrt{x}}}{2+x}$ est intégrable sur $]0,1]$.

e. $\frac{3+\frac{1}{x^2}}{2+\frac{1}{x}}$.

$3+\frac{1}{x^2} \sim \frac{1}{x^2}$ lorsque $x \to 0$. De même $2+\frac{1}{x} \sim \frac{1}{x}$. Donc $\frac{3+\frac{1}{x^2}}{2+\frac{1}{x}} \sim \frac{1/x^2}{1/x} = \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$. Or $\frac{1}{x}$ n'est pas intégrable sur $]0,1]$. Donc $\frac{3+\frac{1}{x^2}}{2+\frac{1}{x}}$ n'est pas intégrable sur $]0,1]$.

f. $5\cdot 2^x 3^{-x}$.

Comme $5\cdot 2^x 3^{-x}$ vaut 5 en 0. Or 5 est intégrable sur $]0,1]$ (Riemann avec $a=0$). Donc $5\cdot 2^x 3^{-x}$ est intégrable sur $]0,1]$.

Exercice 3

a. On pose $X = \frac{1}{2x}$. Quand $x \to +\infty$, alors $X \to 0$. Donc $\ln(1+X) = X - \frac{X^2}{2} + o(X^2)$. Donc $\ln(1+\frac{1}{2x}) = \frac{1}{2x} - \frac{1}{2\cdot 4x^2} + o(\frac{1}{x^2})$. Ainsi $\ln(1+\frac{1}{2x}) - \frac{1}{2x} = -\frac{1}{8x^2} + o(\frac{1}{x^2})$. Donc $\ln(1+\frac{1}{2x}) - \frac{1}{2x} \sim -\frac{1}{8x^2}$ lorsque $x \to +\infty$. Comme $-\frac{1}{8x^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$, alors $\ln(1+\frac{1}{2x}) - \frac{1}{2x}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$.

b. On pose $X = \frac{1}{x}$. Quand $x \to +\infty$, $X \to 0$. Donc $\sqrt{1+X} = 1+\frac{1}{2}X + o(X)$ lorsque $X \to 0$. Donc $\sqrt{1+\frac{1}{x}} = 1+\frac{1}{2x} + o(\frac{1}{x})$ lorsque $x \to +\infty$.

De même $\sqrt{1+\frac{2}{x}} = 1 + \frac{1}{2}\frac{2}{x} + o(\frac{1}{x})$. Ainsi

$$\begin{aligned}\sqrt{1+\frac{1}{x}} - \sqrt{1+\frac{2}{x}} &= 1 + \frac{1}{2x} + o(\frac{1}{x}) - (1 + \frac{1}{2}\frac{2}{x} + o(\frac{1}{x}))\\ &= \frac{1}{2x} - \frac{1}{x} + o(\frac{1}{x})\\ &= \frac{-1}{2x} + o(\frac{1}{x})\end{aligned}$$

Donc $\sqrt{1+\frac{1}{x}} - \sqrt{1+\frac{2}{x}} \sim \frac{-1}{2x}$ lorsque $x \to +\infty$. Or $\frac{-1}{2x}$ n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$. Donc $\sqrt{1+\frac{1}{x}} - \sqrt{1+\frac{2}{x}}$ n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$.

Exercice 4

a. Comme f est décroissante sur $[k, k+1]$, alors $f(k+1) \leq f(x)$ pour tout $x \in [k, k+1]$.

b. Comme $f(k+1) \leq f(x)$ sur $[k, k+1]$, alors en intégrant on obtient : $\int_k^{k+1} f(k+1)dx \leq \int_k^{k+1} f(x)dx$. Or $\int_k^{k+1} f(k+1)dx = f(k+1)[x]_k^{k+1} = f(k+1)(k+1-k) = f(k+1)$. Donc $f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x)dx$.

c. En sommant l'inégalité précédente pour tout $k \in [0, n]$, on obtient : $\sum_{k=0}^n f(k+1) \leq \sum_{k=0}^n \int_k^{k+1} f(x)dx$. Par Chasles, $\sum_{k=0}^n \int_k^{k+1} f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx + \cdots + \int_n^{n+1} f(x)dx = \int_0^{n+1} f(x)dx$.

d. Comme f est positive, alors $f(k) \geq 0$ pour tout k. Donc $S_{n+1} - S_n = f(n+1) \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc (S_n) est croissante.

e. D'après c) : $\sum_{k=0}^n f(k+1) \int_0^{n+1} f(x)dx$. Donc par décalage d'indice on obtient : $\sum_{k=1}^{n+1} f(k) \leq \int_0^{n+1} f(x)dx$. Donc $S_{n+1} - f(0) \leq \int_0^{n+1} f(x)dx$. Donc $S_{n+1} \leq f(0) + \int_0^{n+1} f(x)dx$.

f. Par Chasles, pour tout $t \geq n+1$, $\int_0^t f(x)dx = \int_0^{n+1} f(x)dx + \int_{n+1}^t f(x)dx$. Comme f est positive, alors $\int_{n+1}^t f(x)dx \geq 0$. Donc $\int_0^t f(x)dx \geq \int_0^{n+1} f(x)dx$.

Comme f est intégrable sur $[0, +\infty[$, $\int_0^t f(x)dx$ converge vers $\int_0^{+\infty} f(x)dx$. Donc $\int_0^{+\infty} f(x)dx \geq \int_0^{n+1} f(x)dx$.

g. Comme (S_n) est croissante et majorée par $f(0) + \int_0^{+\infty} f(x)dx$, on en déduit que (S_n) converge et que la série $\sum f(k)$ est convergente.

Exercice 5

a. $\int_0^t e^{-x}dx = [-e^{-x}]_0^t = -e^{-t} - (-e^{-0}) = -e^{-t} + 1 \to 1$ lorsque $t \to +\infty$. Donc e^{-x} est intégrable sur $[0, +\infty[$ et $\int_0^{+\infty} e^{-x}dx = 1$.

b. On fait une intégration par parties : $u = x$ et $v' = e^{-x}$.

$$\int_0^t xe^{-x}dx = [-e^{-x}x]_0^t - \int_0^t 1(-e^{-x})dx = -te^{-t} - 0 + \int_0^t e^{-x}dx = -te^{-t} + [-e^{-x}]_0^t$$
$$= -te^{-t} - e^{-t} - (-e^{-0}) = -te^{-t} - e^{-t} + 1$$

Or $te^{-t} \to 0$ par croissance comparée et e^{-t} tend vers 0 lorsque $t \to +\infty$. Donc xe^{-x} est intégrable et $\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx = 1$. Donc $\mathbb{E}[X] = 1$.

Exercice 6

a. Comme $f(x) \sim \frac{1}{\pi x^2}$ en $+\infty$ et que $\frac{1}{\pi x^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ et sur $]-\infty, -1]$ (Riemann avec $a = 2$ en $+\infty$ et en $-\infty$). Et comme $f(x)$ est continue sur $[-1, 1]$, on en déduit que f est intégrable sur $\mathbb{R}$.

b.

$$\int_0^t \frac{1}{\pi}\frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2\pi}[\ln(1+x^2)]_0^t = \frac{1}{2\pi}(\ln(1+t^2) - \ln(1))$$
$$\to +\infty$$

lorsque $x \to +\infty$.

Donc $xf(x)$ n'est pas intégrable sur $[0, +\infty[$ et donc $xf(x)$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$ et donc X n'admet pas d'espérance.