TD11 - Analyse 2

Exercice 1 Pour chacune des intégrales suivantes dire s'il s'agit d'une intégrale classique ou d'une intégrale impropre dont l'existence doit être justifiée.

$$\int_0^1 \ln(x)dx \qquad \int_0^1 \ln(1+x^2)dx \qquad \int_0^1 \frac{1}{1-x}dx \qquad \int_1^{+\infty} \frac{1}{1-x}dx \qquad \int_{-1}^0 \frac{1}{1-x}dx$$

Exercice 2 Démontrer, à l'aide de la définition de l'intégrabilité, que $\frac{1}{x^3}$ et $\frac{1}{2^x}$ sont intégrables sur $[1, +\infty[$ et que $\ln(x)$ est intégrable sur $]0, 1]$. Calculer

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}dx \qquad \int_1^{+\infty} \frac{1}{2^x}dx \qquad \int_0^1 \ln(x)dx$$

Exercice 3 Démontrer, à l'aide de la définition de l'intégrabilité et d'une intégration par parties, que $\frac{\ln(x)}{x^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ et calculer $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2}dx$.

Exercice 4 Démontrer, à l'aide de la définition de l'intégrabilité et d'une décomposition en éléments simples, que $\frac{1}{x^2-3x+2}$ est intégrable sur $[3, +\infty[$ et calculer $\int_3^{+\infty} \frac{1}{x^2-3x+2}dx$.

Exercice 5 Selon le théorème des intégrales de Riemann :

Est ce que $\frac{1}{x}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$? sur $]0, 1]$? sur $[1, +\infty[$?

Est ce que $\frac{1}{x^2}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$? sur $]0, 1]$? sur $[1, +\infty[$?

Est ce que $\sqrt{x}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$? sur $]0, 1]$? sur $[1, +\infty[$?

Exercice 6 Démontrer que $\frac{1}{x^3+x^2+x+1} \leq \frac{1}{x^2}$ sur $[1, +\infty[$ et en déduire que $\frac{1}{x^3+x^2+x+1}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Démontrer que $\frac{1}{x^3\ln(e+x^2)+2\sqrt{x}} \leq \frac{1}{x^3}$ sur $[0, +\infty[$ et en déduire que $\frac{1}{x^3\ln(e+x^2)+2\sqrt{x}}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Exercice 7 Démontrer que $\frac{1}{x^a\ln(x)} \leq \frac{1}{x^a}$ pour tout $a > 1$ et $x \geq e$.

En déduire que $\frac{1}{x^a\ln(x)}$ est intégrable sur $[e, +\infty[$ pour tout $a > 1$.

En déduire que $\frac{1}{x^a\ln(x)}$ est intégrable sur $[c, +\infty[$ pour tout $a > 1$, $\forall c > 0$.

Exercice 8 Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que $\frac{1}{(x-a)^2}$ est intégrable sur $[a+1, +\infty[$ et montrer à l'aide d'un changement de variables que $\int_{a+1}^{+\infty} \frac{1}{(x-a)^2}dx = 1$.

TD11 - Analyse 2 - Corrections

Exercice 1 $\int_0^1 \ln(x)$ est une intégrale impropre car $\ln(x)$ n'est pas définie en 0.

$\int_0^1 \ln(1+x^2)dx$ est une intégrale classique car $\ln(1+x^2)$ est continue sur $[0,1]$.

$\int_0^1 \frac{1}{1-x}dx$ est une intégrale impropre car $\frac{1}{1-x}$ n'est pas définie en 1.

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{1-x}dx$ est une intégrale impropre car $\frac{1}{1-x}$ n'est pas définie en 1 et car la borne supérieure est $+\infty$.

$\int_{-1}^0 \frac{1}{1-x}dx$ est une intégrale classique car $\frac{1}{1-x}$ est continue sur $[-1,0]$.

Exercice 2

$$\int_1^t \frac{1}{x^3}dx = [\frac{x^{-2}}{-2}]_1^t = \frac{1}{-2}[\frac{1}{x^2}]_1^t = \frac{-1}{2}(\frac{1}{t^2}-1) \to \frac{1}{2}$$

lorsque $t \to +\infty$. Donc $\frac{1}{x^3}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}dx = 1/2$.

$$\int_1^t \frac{1}{2^x}dx = [\frac{1}{-\ln(2)}2^{-x}]_1^t = \frac{-1}{\ln(2)}[\frac{1}{2^x}]_1^t = \frac{-1}{\ln(2)}(\frac{1}{2^t}-\frac{1}{2^1}) \to \frac{1}{2\ln(2)}$$

lorsque $t \to +\infty$. Donc $1/2^x$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{2^x}dx = \frac{1}{2\ln(2)}$.

Sachant qu'une primitive de $\ln(x)$ est $x\ln(x)-x$ sur $]0,1]$ (on peut retrouver ce résultat à l'aide d'une IPP) on a :

$$\int_t^1 \ln(x)dx = [x\ln(x)-x]_t^1 = 1\ln(1)-1-(t\ln(t)-t) = -1-t\ln(t)+t \to -1$$

lorsque $t \to 0$ car $t\ln(t)$ tend vers 0 lorsque $t \to 0$ (croissance comparée). Donc $\ln(x)$ est intégrable sur $]0,1]$ et $\int_0^1 \ln(x)dx = -1$.

Exercice 3 On pose $u' = \frac{1}{x^2}$ et $v = \ln(x)$. On choisit $u = -\frac{1}{x}$.

$$\begin{aligned}\int_1^t \frac{\ln(x)}{x^2}dx &= [-\frac{1}{x}\ln(x)]_1^t - \int_1^t (-\frac{1}{x})\frac{1}{x}dx = -\frac{1}{t}\ln(t) - (-\frac{1}{1}\ln(1)) + \int_1^t \frac{1}{x^2}dx \\ &= -\frac{\ln(t)}{t} + [-\frac{1}{x}]_1^t = -\frac{\ln(t)}{t} + (-\frac{1}{t} - (-\frac{1}{1})) = -\frac{\ln(t)}{t} - \frac{1}{t} + 1 \to 1\end{aligned}$$

lorsque $t \to +\infty$. Donc $\ln(x)/x^2$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2}dx = 1$.

Exercice 4 Il faut décomposer $\frac{1}{x^2-3x+2}$ en éléments simples. Comme $\Delta = (-3)^2 - 4*1*2 = 9-8 = 1$. Donc $x_1 = \frac{-(-3)+\sqrt{1}}{2\cdot 1} = \frac{3+1}{2} = 2$. Donc $x_2 = \frac{-(-3)-\sqrt{1}}{2} = 1$. Donc $x^2-3x+2 = (x-2)(x-1)$. Donc on cherche des réels a et b tels que

$$\frac{1}{x^2-3x+2} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2} = \frac{a(x-2)}{(x-1)(x-2)} + \frac{b(x-1)}{(x-1)(x-2)} = \frac{(a+b)x-2a-b}{(x-1)(x-2)}$$

Par identification, $a+b=0$ et $-2a-b=1$. Donc $a=-b$ et $-2(-b)-b=1$. Donc $b=1$ et $a=-1$. Ainsi

$$\frac{1}{x^2-3x+2} = \frac{-1}{x-1} + \frac{1}{x-2}$$

$$\begin{aligned}\int_3^t \frac{1}{x^2-3x+2}dx &= [-\ln(x-1)]_3^t + [\ln(x-2)]_3^t \\ &= -\ln(t-1) - (-\ln(3-1)) + \ln(t-2) - \ln(3-2) \\ &= \ln(\frac{t-2}{t-1}) + \ln(2)\end{aligned}$$

Or $\frac{t-2}{t-1}$ tend vers 1 lorsque $t \to +\infty$ par la règle des fractions. Donc $\ln(\frac{t-2}{t-1})$ tend vers 0 lorsque $t \to +\infty$. Donc $\frac{1}{x^2-3x+2}$ est intégrable sur $[3,+\infty[$ et $\int_3^{+\infty} \frac{1}{x^2-3x+2} = \ln(2)$.

Exercice 5

a. $1/x = 1/x^1$. Donc cette fonction n'est pas intégrable sur $]0,1]$ ni sur $[1,+\infty[$ ni sur $]0,+\infty[$.

b. $1/x^2$. Cette fonction est intégrable sur $]1,+\infty[$ mais pas sur $]0,1]$ ni $]0,+\infty[$.

c. $\sqrt{x} = 1/x^{-1/2}$. Cette fonction est intégrable sur $]0,1]$ mais pas sur $]1,+\infty[$ ni $]0,+\infty[$.

Exercice 6 Sur $x \geq 1$, on a $x \geq 0$. Donc $x^3+x^2+x+1 \geq 0+x^2+0+0 > 0$. Donc en inversant on change le sens de l'inégalité. Donc $\frac{1}{x^3+x^2+x+1} \leq \frac{1}{x^2}$ sur $[1,+\infty[$.

Comme la fonction $\frac{1}{x^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ et que $\frac{1}{x^3+x^2+x+1}$ est positif, alors $\frac{1}{x^3+x^2+x+1}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$.

Sur $x \geq 0$, $e+x^2 \geq e$, donc $\ln(e+x^2) \geq \ln(e) = 1$. Donc $x^3\ln(e+x^2) \geq x^3$. Donc $x^3\ln(e+x^2)+2\sqrt{x} \geq x^3 \geq 0$. Ainsi $\frac{1}{x^3\ln(e+x^2)+2\sqrt{x})} \leq \frac{1}{x^3}$ sur $[0,+\infty[$.

Comme $\frac{1}{x^3}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ et que $\frac{1}{x^3\ln(e+x^2)+2\sqrt{x}}$ est positif sur $[1,+\infty[$ et que $\frac{1}{x^3\ln(e+x^2)+2\sqrt{x})} \leq \frac{1}{x^3}$ sur $[1,+\infty[$ alors $\frac{1}{x^3\ln(e+x^2)+2\sqrt{x})}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$.

Exercice 7 Soit $a > 1$. Si $x \geq e$, alors $\ln(x) \geq \ln(e) = 1$. Donc $x^a \ln(x) \geq x^a$ car $x^a \geq 0$. Ainsi $\frac{1}{x^a \ln(x)} \leq \frac{1}{x^a}$ si $x \geq e$.

Comme $a > 1$, alors $\frac{1}{x^a}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ et cette fonction est continue sur $[1, e]$, alors $\frac{1}{x^a}$ est intégrable sur $[e, +\infty[$. Comme $\frac{1}{x^a \ln(x)}$ est positif sur $[e, +\infty[$, et que $\frac{1}{x^a \ln(x)} \leq \frac{1}{x^a}$ si $x \geq e$, alors $\frac{1}{x^a \ln(x)}$ est intégrable sur $[e, +\infty[$.

Comme $\frac{1}{x^a \ln(x)}$ est continue sur $]0, +\infty[$. Alors $\frac{1}{x^a \ln(x)}$ est intégrable sur $[c, +\infty[$.

Exercice 8 On pose le changement de variables : $u = x - a$. Donc $x = u + a$ et $dx = du$. Ainsi

$$\int_1^{t-a} \frac{1}{u^2} du = [\frac{-1}{u}]_1^{t-a} = \frac{-1}{t-a} - \frac{-1}{1} = \frac{1}{a-t} + 1 \to 1$$

lorsque $t \to +\infty$. Donc $\frac{1}{(x-a)^2}$ est intégrable sur $[a+1, +\infty[$ et $\int_{a+1}^{+\infty} \frac{1}{(x-a)^2} dx = 1$.

En fait, on pouvait faire sans changement de variables aussi rapidement :

$$\int_{a+1}^{t} \frac{1}{x-a}^2 dx = [\frac{-1}{x-a}]_{a+1}^{t} = \frac{-1}{t-a} - \frac{-1}{a+1-a} = \frac{1}{a-t} + 1 \to 0$$

lorsque $t \to +\infty$. Donc $\frac{1}{(x-a)^2}$ est intégrable sur $[a+1, +\infty[$ et $\int_{a+1}^{+\infty} \frac{1}{(x-a)^2} dx = 1$.