TD10 - Analyse 2

Exercice 1 À l'aide d'une ou plusieurs intégrations par parties, calculer les intégrales suivantes :

$$\int_1^e (2x+3)\ln(x)dx \qquad \int_0^3 (x+1)e^{2x}dx \qquad \int_e^{2e} \ln^2(x)dx$$

Exercice 2 Calculer $\int_1^e x^n \ln(x)dx$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et retrouver le premier résultat de l'exercice précédent.

Exercice 3 Calculer les intégrales suivantes en utilisant le changement de variable proposé.

a. $\int_0^1 (2x+3)\ln(x^2+3x+1)dx$ avec $\varphi(x) = x^2+3x+1$.

b. $\int_0^1 \frac{x+1}{(x^2+2x+1)^3}dx$ avec $\varphi(x) = x^2+2x+1$.

c. $\int_1^e \frac{\ln^2(x)}{x}dx$ avec $\varphi(x) = \ln(x)$.

Exercice 4 En inversant le changement de variable, calculer l'intégrale suivante : $\int_0^4 \frac{t}{1+\sqrt{t}}dt$ avec $x = 1+\sqrt{t}$.

Exercice 5 Soit une fonction continue sur $[-1,1]$ qui est impaire (c'est-à-dire que $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in [-1,1]$). Montrer que $\int_{-1}^1 f(x)dx = 0$.

Exercice 6 En utilisant une intégration par parties, trouver une relation de récurrence pour la suite (u_n) définie par $u_n = \int_1^e \ln^n(x)dx$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Calculer u_0 et en déduire u_1 et u_2 à l'aide de la formule de récurrence.

Exercice 7 Déterminer les primitives des fonctions suivantes sur leur ensemble de définition.

$$\frac{x+2}{(x-1)^2} \qquad \frac{x^3+x+1}{x+1} \qquad \frac{x^2+x+3}{x^2-2x+1}$$

Exercice 8 En inversant le changement de variable, calculer l'intégrale suivante : $\int_{\ln(3)}^{3\ln(2)} \frac{dt}{\sqrt{1+e^t}}$ avec $x = \sqrt{1+e^t}$.

TD10 - Analyse 2 - Corrections

Exercice 1

a. $\int_1^e (2x+3)\ln(x)dx$.

On pose $u(x) = \ln(x)$ et $v'(x) = (2x+3)$. Donc $u'(x) = 1/x$ et $v(x) = x^2+3x$. Ainsi

$$\begin{aligned}
\int_1^e (2x+3)\ln(x)dx &= [\ln(x)(x^2+3x)]_1^e - \int_1^e \frac{x^2+3x}{x}dx \\
&= \ln(e)(e^2+3e) - \ln(1)(1^2+3\cdot 1) - \int_1^e x+3dx \\
&= 1(e^2+3e) - 0 - [\frac{x^2}{2}+3x]_1^e \\
&= e^2+3e - (\frac{e^2}{2}+3e-(\frac{1^2}{2}+3)) \\
&= e^2+3e-\frac{e^2}{2}-3e+\frac{7}{2} \\
&= \frac{e^2}{2}+\frac{7}{2}
\end{aligned}$$

b. $\int_0^3 (x+1)e^{2x}$.

On pose $u(x) = (x+1)$ et $v'(x) = e^{2x}$. Donc $u'(x) = 1$ et $v(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$. Ainsi

$$\begin{aligned}
\int_0^3 (x+1)e^{2x}dx &= [(x+1)e^{2x}/2]_0^3 - \int_0^3 \frac{1}{2}e^{2x}dx \\
&= \frac{4e^6}{2} - \frac{1e^0}{2} - \frac{1}{2}\int_0^3 e^{2x}dx \\
&= 2e^6 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}[\frac{1}{2}e^{2x}]_0^3 \\
&= 2e^6 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(e^6-e^0) \\
&= 2e^6 - \frac{1}{2} - \frac{e^6}{4} + \frac{1}{4} \\
&= \frac{7e^6}{4} - \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

c. $\int_e^{2e} \ln^2(x)dx$.

On pose $u(x) = \ln^2(x)$ et $v'(x) = 1$. Donc $u'(x) = 2\frac{1}{x}\ln(x)$ et $v(x) = x$. Ainsi

$$\begin{aligned}\int_e^{2e} \ln^2(x)dx &= [x\ln^2(x)]_e^{2e} - \int_e^{2e} x\frac{2}{x}\ln(x)dx \\ &= 2e \cdot \ln^2(2e) - e \cdot 1 - 2\int_e^{2e} \ln(x)dx\end{aligned}$$

On utilise de nouveau une intégration par parties pour calculer la deuxième intégrale. On pose $u(x) = \ln(x)$ et $v'(x) = 1$. Donc $u'(x) = 1/x$ et $v(x) = x$. Ainsi

$$\begin{aligned}\int_e^{2e} \ln^2(x)dx &= 2e \cdot \ln^2(2e) - e - 2\left([x\ln(x)]_e^{2e} - \int_e^{2e} \frac{x}{x}dx\right) \\ &= 2e \cdot \ln^2(2e) - e - 2\left(2e\ln(2e) - e \cdot 1 - [x]_e^{2e}\right) \\ &= 2e\ln^2(2e) - e - 2(2e\ln(2e) - e - (2e - e)) \\ &= 2e\ln^2(2e) - e - 4e\ln(2e) + 4e \\ &= 2e\ln^2(2e) - 4e\ln(2e) + 3e \\ &= 2e(\ln(2) + \ln(e))^2 - 4e(\ln(2) + \ln(e)) + 3e \\ &= 2e(\ln^2(2) + 2\ln(2) + 1) - 4e(\ln(2) + 1) + 3e \\ &= 2e\ln^2(2) + 4e\ln(2) + 2e - 4e\ln(2) - 4e + 3e \\ &= 2e\ln^2(2) + e\end{aligned}$$

Exercice 2 On pose $u(x) = \ln(x)$ et $v'(x) = x^n$. Donc $u'(x) = 1/x$ et $v(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$. Alors

$$\begin{aligned}\int_1^e x^n\ln(x)dx &= [\ln(x)\frac{x^{n+1}}{n+1}]_1^e - \int_1^e \frac{x^{n+1}}{x(n+1)}dx \\ &= \ln(e)\frac{e^{n+1}}{n+1} - \ln(1)\frac{1^{n+1}}{n+1} - \int_1^e \frac{x^n}{n+1}dx \\ &= \frac{e^{n+1}}{n+1} - 0 - [\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}]_1^e \\ &= \frac{e^{n+1}}{n+1} - (\frac{e^{n+1}}{(n+1)^2} - \frac{1^{n+1}}{(n+1)^2}) \\ &= e^{n+1}(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}) + \frac{1}{(n+1)^2} \\ &= e^{n+1}\frac{(n+1)-1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \\ &= e^{n+1}\frac{n}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^2}\end{aligned}$$

On retrouve le résultat précédent ainsi :

$$
\begin{aligned}
\int_1^e (2x+3)\ln(x)dx &= 2\int_1^e x^1\ln(x)dx + 3\int_1^e x^0\ln(x)dx \\
&= 2(e^{1+1}\frac{1}{(1+1)^2} + \frac{1}{(1+1)^2}) + 3(e^{0+1}\frac{0}{(0+1)^2} + \frac{1}{(0+1)^2}) \\
&= 2(\frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}) + 3(0+1) \\
&= \frac{e^2}{2} + \frac{1}{2} + 3 \\
&= \frac{e^2}{2} + \frac{7}{2}
\end{aligned}
$$

Exercice 3

a. Comme $\varphi(x) = x^2 + 3x + 1$, alors $\varphi'(x) = 2x + 3$. Alors en posant $t = \varphi(x)$, on a $t = \varphi(0) = 0^2 + 3 \cdot 0 + 1 = 1$ quand $x = 0$ et $t = \varphi(1) = 1^2 + 3 \cdot 1 + 1 = 5$ quand $x = 1$. Alors

$$
\int_0^1 (2x+3)\ln(x^2+3x+1)dx = \int_0^1 \varphi'(x)\ln(\varphi(x))dx = \int_1^5 \ln(t)dt
$$

Or une primitive de $\ln(x)$ est $x\ln(x) - x$ (à l'aide d'une IPP). Donc

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 (2x+3)\ln(x^2+3x+1)dx &= [x\ln(x) - x]_1^5 = 5\ln(5) - 5 - (1\ln(1) - 1) \\
&= 5\ln(5) - 5 + 1 = 5\ln(5) - 4
\end{aligned}
$$

b. Comme $\varphi(x) = x^2 + 2x + 1$, alors $\varphi'(x) = 2x + 2$. Alors en posant $t = \varphi(x)$, on a $t = \varphi(0) = 0^2 + 2 \cdot 0 + 1 = 1$ quand $x = 0$ et $t = \varphi(1) = 1^2 + 2 \cdot 1 + 1 = 4$ quand $x = 1$. Donc

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{x+1}{(x^2+2x+1)^3}dx &= \int_0^1 \frac{1}{2}\frac{1}{\varphi(x)^3}\varphi'(x)dx = \frac{1}{2}\int_1^4 \frac{1}{t^3}dt \\
&= \frac{1}{2}[\frac{t^{-2}}{-2}]_1^4 = \frac{-1}{4}(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{1^2}) = \frac{-1}{4}(\frac{1}{16} - 1) \\
&= \frac{1}{4}(\frac{16}{16} - \frac{1}{16}) = \frac{15}{64}
\end{aligned}
$$

c. On pose $t = \varphi(x)$. Alors $\varphi'(x) = \frac{1}{x}$. Donc $t = \varphi(1) = \ln(1) = 0$ quand $x = 1$ et $t = \varphi(e) = \ln(e) = 1$ quand $x = e$. Alors

$$
\int_1^e \frac{\ln^2(x)}{x}dx = \int_1^e (\ln(x))^2\varphi'(x)dx = \int_0^1 t^2dt = [\frac{t^3}{3}]_0^1 = 1/3 - 0/3 = 1/3
$$

Exercice 4 On pose $x = 1 + \sqrt{t}$. Donc $\sqrt{t} = x - 1$ et $t = (x-1)^2$. Ainsi $dt = 2(x-1)dx$. Quand $t = 0$, alors $x = 1 + \sqrt{0} = 1$ et quand $t = 4$, alors $x = 1 + \sqrt{4} = 1 + 2 = 3$. Donc

$$\begin{aligned}
\int_0^4 \frac{t}{1+\sqrt{t}} dt &= \int_1^3 \frac{(x-1)^2}{x} 2(x-1)dx \\
&= 2\int_1^3 \frac{(x-1)^3}{x} dx \\
&= 2\int_1^3 \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x} dx \\
&= 2\int_1^3 x^2 - 3x + 3 - \frac{1}{x} dx \\
&= 2[\frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2} + 3x - \ln(x)]_1^3 \\
&= 2(\frac{3^3}{3} - 3\frac{3^2}{2} + 3\cdot 3 - \ln(3) - (\frac{1^3}{3} - 3\frac{1^2}{2} + 3\cdot 1 - \ln(1))) \\
&= 2(9 - \frac{27}{2} + 9 - \ln(3) - \frac{1}{3} + \frac{3}{2} - 3 - 0) \\
&= 2(15 - \frac{27}{2} + \frac{3}{2} - \frac{1}{3} - \ln(3) \\
&= 2(15 - \frac{24}{2} - \frac{1}{3}) - 2\ln(3) \\
&= 2(\frac{90 - 72 - 2}{6}) - 2\ln(3) \\
&= 2\frac{16}{6} - 2\ln(3) = \frac{16}{3} - \ln(9)
\end{aligned}$$

Exercice 5 Par Chasles, on a $\int_{-1}^1 f(x)dx = \int_{-1}^0 f(x)dx + \int_0^1 f(x)dx$. On pose le changement de variable $x = -t$ dans la première intégrale. Donc $dx = -dt$. Alors comme f est impaire on a :

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^0 f(x)dx = \int_{-(-1)}^0 f(-t)(-dt) &= -\int_1^0 f(-t)dt \\
&= -\int_1^0 -f(t)dt = \int_1^0 f(t)dt = -\int_0^1 f(t)dt
\end{aligned}$$

Donc

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = -\int_0^1 f(t)dt + \int_0^1 f(x)dx = -\int_0^1 f(x)dx + \int_0^1 f(x)dx = 0$$

Exercice 6 Soit $n \geq 1$. On utilise une intégration par parties sur u_n. On pose $u(x) = \ln^n(x)$ et $v'(x) = 1$. Donc $u'(x) = n\frac{1}{x}\ln^{n-1}(x)$ et $v(x) = x$. Alors

$$\begin{aligned} u_n = \int_1^e \ln^n(x) &= [x\ln^n(x)]_1^e - \int_1^e n\frac{1}{x}\ln^{n-1}(x)xdx \\ &= e\ln^n(e) - 1\ln^n(1) - n\int_1^e \ln^{n-1}(x)dx \\ &= e - nu_{n-1} \end{aligned}$$

Donc pour tout $n \geq 1$, $u_n = e - nu_{n-1}$.
Calculons u_0.

$$u_0 = \int_1^e \ln^0(x)dx = \int_1^e 1dx = e - 1$$

Ainsi

$$\begin{aligned} u_0 &= e - 1 \\ u_1 &= e - 1 \cdot u_0 = e - (e-1) = 1 \\ u_2 &= e - 2 \cdot u_1 = e - 2 \cdot 1 = e - 2 \\ u_3 &= e - 3 \cdot u_2 = e - 3(e-2) = -2e + 6 \end{aligned}$$

Exercice 7

a. $\frac{x+2}{(x-1)^2}$.

Comme le degré de la fraction rationnelle est -1, on cherche la décomposition en éléments simples. $(x-1)^2$ est déjà décomposé en facteurs irréductibles. Donc on cherche a et b tels que

$$\begin{aligned} \frac{x+2}{(x-1)^2} &= \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2} \\ &= \frac{a(x-1)}{(x-1)^2} + \frac{b}{(x-1)^2} \\ &= \frac{ax - a + b}{(x-1)^2} \\ &= \frac{ax + (b-a)}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

Par identification on obtient $a = 1$ et $b - a = 2$ donc $b = a + 2 = 3$. Ainsi

$$\frac{x-2}{(x-1)^2} = \frac{1}{x-1} + \frac{3}{(x-1)^2}$$

Ainsi les primitives de $\frac{x-2}{(x-1)^2}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ sont $\ln(|x-1|) - 3\frac{1}{x-1} + C$ avec $C \in \mathbb{R}$.

b. $\frac{x^3+x+1}{x+1}$.

Comme le degré de la fraction rationnelle est $3-1=2 \geq 0$, on cherche a, b et c tels que

$$\begin{aligned} x^3+x+1 &= (ax^2+bx+c)(x+1)+d \\ &= ax^3+bx^2+cx+ax^2+bx+c+d \\ &= ax^3+(b+a)x^2+(c+b)x+(c+d) \end{aligned}$$

Par identification, on obtient le système $a=1$, $b+a=0$, $c+b=1$ et $c+d=1$. Donc $a=1$, $b=0-a=-1$, $c=1-b=1-(-1)=2$ et $d=1-c=1-2=-1$.

Ainsi $x^3+x+1=(x^2-x+2)(x+1)-1$. Donc

$$\frac{x^3+x+1}{x+1} = x^2-x+2-\frac{1}{x+1}$$

La fraction rationnelle $\frac{1}{x+1}$ est déjà décomposé en élements simples. Donc les primitives sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ sont $\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+2x-\ln(|x+1|)+C$ avec $C\in\mathbb{R}$.

c. $\frac{x^2+x+3}{x^2-2x+1}$.

Comme le degré de la fractionnelle est ≥ 0, on cherche a, b, c tels que

$$\begin{aligned} x^2+x+3 &= a(x^2-2x+1)+(bx+c) \\ &= ax^2-2ax+a+bx+c \\ &= ax^2+(b-2a)x+(a+c) \end{aligned}$$

Par identification, on en déduit que $a=1$, $b-2a=1$ et $a+c=3$. Donc $a=1$, $b=1+2a=3$ et $c=3-a=3-1=2$. Ainsi $x^2+x+3=1(x^2-2x+1)+(3x+2)$. Donc

$$\frac{x^2+x+3}{x^2-2x+1} = 1+\frac{3x+2}{x^2-2x+1}$$

Calculons maintenant la décomposition en éléments simples de $\frac{3x+2}{x^2-2x+1}$. Le dénominateur x^2-2x+1 doit être décomposé en facteurs irréductibles. Comme $\Delta=(-2)^2-4\cdot 1\cdot 1=0$, et que $\frac{-b}{2a}=2/2=1$. Ainsi $x^2-2x+1=(x-1)^2$. Donc on cherche a et b tels que

$$\begin{aligned} \frac{3x+2}{x^2-2x+1} &= \frac{a}{x-1}+\frac{b}{(x-1)^2} \\ &= \frac{a(x-1)}{(x-1)^2}+\frac{b}{(x-1)^2} \\ &= \frac{ax+(b-a)}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

Par identification, on en déduit que $a=3$ et que $b-a=2$ donc $b=2+a=5$. Ainsi

$$\frac{x^2+x+3}{x^2-2x+1} = 1+\frac{3}{x-1}+\frac{5}{(x-1)^2}$$

Donc les primitives sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ sont $x+3\ln(|x-1|)-\frac{5}{x-1}+C$ avec $C\in\mathbb{R}$.

Exercice 8 On pose $x = \sqrt{1+e^t}$. Donc $x^2 = 1 + e^t$ et $e^t = x^2 - 1$. Ainsi $t = \ln(x^2-1)$. Quand $t = \ln(3)$, alors $x = \sqrt{1+\exp(\ln(3))} = \sqrt{1+3} = 2$. Quand $t = 3\ln(3)$, alors $x = \sqrt{1+\exp(3\ln(2))} = \sqrt{1+8} = \sqrt{9} = 3$. Donc $dt = \frac{2x}{x^2-1}dx$.

$$\begin{aligned}\int_{\ln(3)}^{3\ln(2)} \frac{dt}{\sqrt{1+e^t}} &= \int_2^3 \frac{1}{x}\frac{2x}{x^2-1}dx \\ &= 2\int_2^3 \frac{1}{x^2-1}dx\end{aligned}$$

Il faut décomposer $\frac{1}{x^2-1}$ en éléments simples. Comme $x^2-1 = (x-1)(x+1)$ alors on cherche a et b des réels tels que

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}$$

On met au même dénominateur :

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{a(x+1)}{x^2-1} + \frac{b(x-1)}{x^2-1} = \frac{(a+b)x+(a-b)}{x^2-1}$$

Par identification entre les numérateurs, on en déduit que $a+b=0$ et $a-b=1$ donc $a=-b$ et $(-b)-b=1$. Donc $b=-1/2$ et $a=1/2$. Ainsi

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1/2}{x-1} + \frac{-1/2}{x+1}$$

D'où

$$\begin{aligned}\int_{\ln(3)}^{3\ln(2)} \frac{dt}{\sqrt{1+e^t}} &= 2\int_2^3 \frac{1}{x^2-1}dx \\ &= 2\int_2^3 \frac{1/2}{x-1}dx + 2\int_2^3 \frac{-1/2}{x+1}dx \\ &= \int_2^3 \frac{1}{x-1}dx - \int_2^3 \frac{1}{x+1}dx \\ &= [\ln(x-1)]_2^3 - [\ln(x+1)]_2^3 \\ &= \ln(3-1) - \ln(2-1) - (\ln(3+1) - \ln(2+1)) \\ &= \ln(2) - \ln(1) - \ln(4) + \ln(3) \\ &= \ln(2) - 2\ln(2) + \ln(3) = -\ln(2) + \ln(3) = \ln(3/2)\end{aligned}$$

Retiré des exercices finaux

b. $\int_1^e (x^2+x+1)\ln(x)dx$.

On pose $u(x)=\ln(x)$ et $v'(x)=x^2+x+1$. Donc $u'(x)=1/x$ et $v(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x$. Ainsi

$$\begin{aligned}
\int_1^e (x^2+x+1)\ln(x) &= [\ln(x)\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x]_1^e - \int_1^e \frac{\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x}{x}dx \\
&= \ln(e)(e^3/3+e^2/2+e) - \ln(1)(1/3+1/2+1) - \int_1^e \frac{x^2}{3}+\frac{x}{2}+1dx \\
&= \frac{e^3}{3}+\frac{e^2}{2}+e-0-[\frac{x^3}{9}+\frac{x^2}{4}+x]_1^e \\
&= \frac{e^3}{3}+\frac{e^2}{2}+e-(\frac{e^3}{9}+\frac{e^2}{4}+e-1/9-1/4-1) \\
&= \frac{e^3}{3}+\frac{e^2}{2}+e-\frac{e^3}{9}-\frac{e^2}{4}-e+1/9+1/4+1 \\
&= \frac{2e^3}{9}+\frac{e^2}{4}+\frac{4+9+36}{36} \\
&= \frac{2e^3}{9}+\frac{e^2}{4}+\frac{49}{36}
\end{aligned}$$