Intégration : partie 3

- Intégrales impropres en $+\infty$.
- Intégrales impropres en 0.
- Théorème de comparaison.

Intégrales impropres

Pour l'instant on a étudié les intégrales de fonction continue sur un segment $[a, b]$ où l'intervalle est fermé.

On va voir dans ce cours comment définir, étudier et calculer des intégrales comme $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$ et $\int_0^1 \ln(x) dx$. C'est ce qu'on appelle intégrale impropre. On va en voir de deux types :

- Lorsqu'on intègre jusqu'à une borne infinie.
- Lorsqu'en une borne, la fonction n'admet pas de limite finie.

Intégrales impropres

Définition

Soit f une fonction continue sur $[1, +\infty[$. On dit que f est intégrable sur $[1, +\infty[$ ou que $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ converge (ou est convergente) si $\int_1^t f(x)dx$ converge (vers une limite finie) lorsque t tend vers $+\infty$.
Dans ce cas, on note $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ la limite précédente et on l'appelle **intégrale impropre** de f sur $[1, +\infty[$.

Exemple : $\frac{1}{x^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx = 1$.

Exemple : $\frac{1}{x}$ n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}dx = +\infty$.

Remarque : On peut remplacer le 1 dans la définition précédente par n'importe quelle constante.

Intégrales impropres

Exemple : $\frac{1}{x^2}$. On calcule

$$\int_1^t \frac{1}{x^2}dx = [-\frac{1}{x}]_1^t = -[\frac{1}{x}]_1^t = -(\frac{1}{t} - 1) = 1 - \frac{1}{t} \to 1$$

lorsque $t \to +\infty$. Donc $1/x^2$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ et $\int_1^{+\infty} = 1$

Exemple : $\frac{1}{x}$. On calcule

$$\int_1^t \frac{1}{x}dx = [\ln(x)]_1^t = -[\ln(x)]_1^t = \ln(t) - \ln(1) \to +\infty$$

lorsque $t \to +\infty$. Donc $1/x$ n'est pas intégrable mais il y a quand même convergence de l'intégrale vers $+\infty$ donc $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}dx = +\infty$.

Intégrales impropres

Si une fonction n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$ on n'a pas forcément que $\int_1^{+\infty} f(x)dx = +\infty$. Soit ce sera le cas, soit cela tendera vers $-\infty$, soit il n'y a pas de limite comme dans le cas suivant :

Exemple : $\sin(x)$ n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$ et on n'a pas de divergence vers $\pm\infty$ pour l'intégrale. Donc $\int_1^{+\infty} \sin(x)dx$ n'a aucun sens.

En effet :

$$\int_1^{+\infty} \sin(x)dx = [\cos(x)]_1^t = \cos(t) - \cos(1)$$

n'a pas de limite lorsque $t \to +\infty$.

Intégrales impropres

La définition sur $]-\infty, 1]$ est symétrique.

Définition

Soit f une fonction continue sur $]-\infty, 0]$. On dit que f est intégrable sur $]-\infty, 0]$ ou que $\int_{-\infty}^{0} f(x)dx$ converge (ou est convergente) si $\int_{t}^{0} f(x)dx$ converge (vers une limite finie) lorsque t tend vers $+\infty$.
Dans ce cas, on note $\int_{-\infty}^{0} f(x)dx$ la limite précédente et on l'appelle **intégrale impropre** de f sur $]-\infty, 0]$.

Exemple : e^x est intégrable sur $]-\infty, 0]$ et $\int_{-\infty}^{0} e^x dx = 1$.

Exemple : $\frac{1}{x}$ n'est pas intégrable sur $]-\infty, -1]$ et $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x} dx = -\infty$.

Remarque : Comme précédemment, on peut remplacer le 0 de la définition par n'importe quelle constante.

Intégrales impropres

Exemple : e^x. On calcule

$$\int_t^0 e^x dx = [e^x]_t^0 = e^0 - e^t \to 1$$

lorsque $t \to -\infty$. Donc e^x et intégrable sur $]-\infty, 0]$ et $\int_{-\infty}^0 e^x dx = 1$.

Exemple : $\frac{1}{x}$. On calcule

$$\int_t^{-1} \frac{1}{x} dx = [\ln(|x|)]_t^{-1} = \ln(|-1|) - \ln(|t|) \to -\infty$$

lorsque $t \to -\infty$. Donc $1/x$ n'est pas intégrable sur $]-\infty, -1]$ et $\int_{-\infty}^{-1} = -\infty$.

Intégrales impropres

Définition

Soit f une fonction continue sur $]-\infty,+\infty[$. On dit que f est intégrable sur $]-\infty,+\infty[$ ou que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ converge (ou est convergente) si f est intégrale sur $]-\infty,0]$ et $[0,+\infty[$. Dans ce cas on note $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)dx$ l'intégrale impropre de f sur $\mathbb{R}$.

Exemple : $e^{-|x|}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Exemple : e^{x} n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$.

Intégrales impropres

Exemple : $e^{-|x|}$. Sur $[0, +\infty[$:

$$\int_0^t e^{-|x|} dx = \int_0^t e^{-x} dx = [-e^{-x}]_0^t = e^0 - e^{-t} \to 1$$

lorsque $t \to +\infty$. Donc $e^{-|x|}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

Sur $]-\infty, 0]$:

$$\int_t^0 e^{-|x|} dx = \int_t^0 e^x dx = [e^x]_t^0 = e^0 - e^t \to 1$$

lorsque $t \to -\infty$. Donc $e^{-|x|}$ est intégrable sur $]-\infty, 0]$.

On en déduit que $e^{-|x|}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et que $\int_{\mathbb{R}} e^{-|x|} = 1 + 1 = 2$.

Intégrales impropres

Exemple : e^x n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$ car e^x n'est pas intégrable sur $[0, +\infty[$. En effet :

$$\int_0^t e^x dx = [e^x]_0^t = e^t - e^0 \rightarrow +\infty$$

lorsque $t \rightarrow +\infty$.

Intégrales de Riemann

Théorème

Soit $a \in \mathbb{R}$. L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^a} dx$ est convergente si et seulement si $a > 1$.

Remarque : On peut remplacer la borne inférieure de l'intervalle d'intégration par n'importe quelle constante > 0.

Démonstration : Si $a > 1$:

$$\int_1^t \frac{1}{x^a} dx = [\frac{x^{-a+1}}{-a+1}]_1^t = \frac{t^{-a+1}}{-a+1} - \frac{1^{-a+1}}{-a+1} \to \frac{1}{a-1}$$

lorsque $t \to +\infty$. Donc $\frac{1}{x^a}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^a} dx = \frac{1}{1-a}$ si $a > 1$.

Intégrales de Riemann

Si $a = 1$:

$$\int_1^t \frac{1}{t} dx = [\ln(x)]_1^t = \ln(t) - \ln(1) \to +\infty$$

lorsque $t \to +\infty$. Donc $\frac{1}{x}$ n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = +\infty$.

Si $a < 1$:

$$\int_1^t \frac{1}{x^a} dx = [\frac{x^{-a+1}}{-a+1}]_1^t = \frac{t^{-a+1}}{-a+1} - \frac{1^{-a+1}}{-a+1} \to +\infty$$

lorque $t \to +\infty$. Donc $\frac{1}{x^a}$ n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^a} dx = +\infty$ si $a < 1$.

Intégrales de références

Théorème
Soit $a > 0$. La fonction a^x est intégrable sur $[1, +\infty[$ si et seulement si $a < 1$.

Exemple : $\frac{1}{2^x}$ et e^{-x} sont intégrables sur $[1, +\infty[$.

Démonstration : Si $a < 1$:

$$\int_1^t a^x dx = \int_1^t \exp(x\ln(a))dx = [\frac{1}{\ln(a)}a^x]_1^t = \frac{1}{\ln(a)}(a^t - a^1) \to -\frac{a}{\ln(a)}$$

lorsque $t \to +\infty$ car $t\ln(a) \to -\infty$ car $\ln(a) < 0$ et donc $\exp(t\ln(a)) \to 0$. Donc a^x est intégrable sur $[1, +\infty[$ et $\int_1^{+\infty} a^x dx = \frac{-a}{\ln(a)}$.

Intégrales de références

Si $a = 1$:

$$\int_1^t 1^x dx = \int_1^t 1 dx = [x]_1^t = t - 1 \to +\infty$$

lorsque $t \to +\infty$. Donc a^x n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$ et $\int_1^{+\infty} a^x dx = +\infty$ si $a = 1$.

Si $a > 1$:

$$\int_1^t a^x dx = \int_1^t \exp(x \ln(a)) dx = [\frac{1}{\ln(a)} a^x]_1^t = \frac{1}{\ln(a)}(a^t - a^1) \to +\infty$$

lorsque $t \to +\infty$ car $\ln(a) > 0$ et donc $t \ln(a) \to +\infty$ et donc $\exp(t \ln(a)) \to +\infty$. Donc a^x n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$ et $\int_1^{+\infty} a^x dx = +\infty$ si $a > 1$.

Intégrales impropres à bornes finies

Définition

Soit f une fonction continue sur $]a, b]$. On dit que f est intégrable sur $]a, b]$ si $\int_t^b f(x)dx$ tend vers une limite finie lorsque t tend vers a. Dans le cas où f est intégrable, on note $\int_a^b f(x)dx$ cette limite et on l'appelle intégrale impropre.

Exemple : $\frac{1}{\sqrt{x}}$ est intégrable sur $]0, 1]$.

Exemple : $\frac{1}{x}$ n'est pas intégrable sur $]0, 1]$.

Exemple :

$$\int_t^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = [2\sqrt{x}]_t^1 = 2(\sqrt{1} - \sqrt{t}) \to 2$$

lorsque $t \to 0$. Donc $\frac{1}{\sqrt{x}}$ est intégrable sur $]0, 1]$ et $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2$.

Exemple :

$$\int_t^1 \frac{1}{x}dx = [\ln(x)]_t^1 = \ln(1) - \ln(t) \to +\infty$$

lorsque $t \to 0$. Donc $\frac{1}{x}$ n'est pas intégrable sur $]0, 1]$ et $\int_0^1 \frac{1}{x}dx = +\infty$.

Intégrales impropres à bornes finies

Définition

Soit f une fonction continue sur $[a, b[$. On dit que f est intégrable sur $[a, b[$ si $\int_a^t f(x)dx$ tend vers une limite finie lorsque t tend vers b. Dans le cas où f est intégrable, on note $\int_a^b f(x)dx$ cette limite et on l'appelle intégrale impropre.

Exemple : $\frac{1}{\sqrt{|x|}}$ est intégrable sur $[-1, 0[$.

Exemple : $\frac{1}{x}$ n'est pas intégrable sur $[-1, 0[$.

Intégrales impropres à bornes finies

Exemple :

$$\int_{-1}^{t} \frac{1}{\sqrt{|x|}} dx = \int_{-1}^{t} \frac{1}{\sqrt{-x}} dx = [-2\sqrt{-x}]_{-1}^{t} = -2(\sqrt{-t} - \sqrt{1}) \to 2$$

lorsque $t \to 0$. Donc $\frac{1}{\sqrt{|x|}}$ est intégrable sur $[-1, 0[$ et $\int_{-1}^{t} \frac{1}{\sqrt{|x|}} dx = 2$.

Exemple :

$$\int_{-1}^{t} \frac{1}{x} dx = [\ln(-x)]_{-1}^{t} = \ln(-t) - \ln(1) \to -\infty$$

lorsque $t \to 0$. Donc $\frac{1}{x}$ n'est pas intégrable sur $[-1, 0[$ et $\int_{-1}^{t} \frac{1}{x} dx = -\infty$.

Intégrales impropres à bornes finies

Définition

Soit f une fonction continue sur $]a, b[$. On dit que f est intégrable sur $]a, b[$ si f est intégrable sur $]a, c]$ et $[c, b[$ (où $c \in]a, b[$).

Exemple : $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ est intégrable sur $]-1, 1[$.

Exemple : $\frac{1}{x(x-1)}$ n'est pas intégrable sur $]0, 1[$.

Intégrales de Riemann

Théorème

Soit $a \in \mathbb{R}$. L'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{x^a}$ est convergente si et seulement si $a < 1$.

Démonstration : Si $a < 1$:

$$\int_t^1 \frac{1}{x^a} dx = [\frac{1}{a-1}\frac{1}{x^{a-1}}]_t^1 = \frac{1}{a-1}\frac{1}{t^{a-1}} - \frac{1}{a-1}\frac{1}{1} \rightarrow \frac{1}{1-a}$$

lorsque $t \rightarrow 0$. Donc $\frac{1}{x^a}$ est intégrable sur $]0,1]$ si $a < 1$.

Si $a > 1$:

$$\int_t^1 \frac{1}{x^a} dx = [\frac{1}{a-1}\frac{1}{x^{a-1}}]_t^1 = \frac{1}{a-1}\frac{1}{t^{a-1}} - \frac{1}{a-1}\frac{1}{1} \rightarrow +\infty$$

lorsque $t \rightarrow 0$. Donc $\frac{1}{x^a}$ n'est pas intégrable sur $]0,1]$ si $a > 1$ et $\int_0^1 \frac{1}{x^a} dx = +\infty$.

Intégrales de Riemann

Si $a = 1$:

$$\int_t^1 \frac{1}{x} dx = [\ln(x)]_t^1 = \ln(1) - \ln(t) \to +\infty$$

lorsque $t \to 0$. Donc $\frac{1}{x}$ n'est pas intégrable sur $]0, 1]$ et $\int_0^1 \frac{1}{x} dx = +\infty$.

Fonctions positives

Théorème

Soit f une fonction positive sur $[a, b[$ avec $a \in \mathbb{R}$ et b pouvant être fini ou $+\infty$. Si f n'est pas intégrable sur $[a, b[$, alors $\int_a^b f(x)dx = +\infty$ (on dit que l'intégrale de f sur $[a, b[$ diverge vers $+\infty$).

Ainsi si une fonction est positive, soit l'intégrale impropre est finie, soit elle vaut $+\infty$.

Remarque : Ce résultat est analogue aux séries : une série de termes positives est soit convergente soit divergente vers $+\infty$.

Exemple : $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx < +\infty$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = +\infty$.

Exemple : $\int_1^{+\infty} \sin(x) dx$ n'existe pas.

Théorème de comparaison

Théorème

Soit f et g deux fonctions positives et continues sur $[a, b[$ (où b peut être $+\infty$) telles que $f(x) \leq g(x)$ sur $[a, b[$.

- Si g est intégrable sur $[a, b[$, alors f aussi l'est et $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.
- Si f n'est pas intégrable sur $[a, b[$, alors g ne l'est pas non plus.

Exemple : $\frac{1}{1+x^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$
$\frac{1}{1+x^2} \frac{1}{x^2}$ car $1 + x^2 \geq x^2$ sur $[1, +\infty$. Comme $\frac{1}{x^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ et que $\frac{1}{1+x^2}$ est positive sur $[1, +\infty[$, alors $\frac{1}{1+x^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.