Intégration : partie 2

- Intégration par parties
- Changement de variable
- Primitives de fractions rationnelles
- Moyenne d'une fonction

Primitive

Théorème

Soit f continue sur $[a,b]$ et $c \in [a,b]$. Alors $\int_c^x f(x)dx$ est la primitive de f sur $[a,b]$ qui vaut 0 en c.

Cette écriture sera utile pour calculer les primitives à l'aide d'intégrations par parties.

Intégration par parties

Théorème

Soient u et v deux fonctions continues sur $[a, b]$. Alors

$$\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'$$

Démonstration : Une primitive de $u'v + v'u$ est uv. Donc $\int_a^b u'(x)v(x) + v'(x)u(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b$. Donc $\int_a^b u'v + \int_a^b v'u = [uv]_a^b$ et $\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'$.

Intégration par parties

L'intégration par parties permet de calculer des primitives plus compliquées. En pratique il faut identifier le bon u et le bon v'.

Exemple : Calculer une primitive de $\ln(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

On fait apparaitre un 1 artificiel pour pouvoir intégrer par parties : $\int_1^t \ln(x)dx = \int_1^t 1 \cdot \ln(x)dx$, on pose $u(x) = \ln(x)$ et $v'(x) = 1$. Ainsi $u'(x) = 1/x$ et $v(x) = x$ (on choisit ici 0 pour constante d'intégration). Ainsi

$$\begin{aligned}\int_1^t 1 \cdot \ln(x)dx &= [x\ln(x)]_1^t - \int_1^t \frac{1}{x}xdx = t\ln(t) - \int_1^t dx \\ &= t\ln(t) - [x]_1^t = t\ln(t) - t + 1\end{aligned}$$

Intégration par parties

Exemple : Trouver une relation de récurrence pour la suite $I_n = \int_0^1 \frac{1}{(x^2+1)^n} dx$.

On pose $u' = 1$ et $v = \frac{1}{(x^2+1)^n}$. On choisit $u = x + 0$ et $v' = \frac{-2nx}{(x^2+1)^{n+1}}$. Donc

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1}{(x^2+1)^n} dx &= [x\frac{1}{(x^2+1)^n}]_0^1 - \int_0^1 x\frac{-2nx}{(x^2+1)^n} dx \\
&= 1 \cdot \frac{1}{(1^2+1)^n} - 0 + 2n\int_0^1 \frac{x^2}{(x^2+1)^{n+1}} dx \\
&= \frac{1}{2^n} + 2n\int_0^1 \frac{x^2+1-1}{(x^2+1)^{n+1}} dx \\
&= \frac{1}{2^n} + 2n(\int_0^1 \frac{x^2+1}{(x^2+1)^{n+1}} dx - \int_0^1 \frac{1}{(x^2+1)^{n+1}} dx) \\
&= \frac{1}{2^n} + 2n(I_n - I_{n+1})
\end{aligned}$$

Intégration par parties

On isole I_{n+1} pour l'exprimer en fonction de I_n. On trouve

$$I_{n+1}2n = \frac{1}{2^n} + (2n+1)I_n$$

Donc

$$I_{n+1} = \frac{1}{2n}(\frac{1}{2^n} + (2n+1)I_n)$$

Attention, il s'agit d'une relation de récurrence mais pas de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ car la relation fait intervenir l'indice n dans le calcul de I_{n+1} à partir de I_n.

Changement de variable

Théorème

Soit f une fonction continue sur et $\varphi : [a, b] \to [\varphi(a), \varphi(b)]$ une fonction C^1. Alors

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)dt$$

Exemple : Calculer $\int_1^e \frac{1}{x} \ln^2(x)dx$ en posant le changement de variable $t = \ln(x)$.

On pose $t = \varphi(x) = \ln(x)$ sur $[1, e]$ (qui est C^1 et croissante sur $[1, e]$). Alors $\int_1^e \frac{1}{x} \ln^2(x)dx = \int_0^1 t^2 dt = [\frac{t^3}{3}]_0^1 = 1/3 - 0/3 = 1/3$.

Changement de variable

Exemple : Calculer $\int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{t}} dt$ en posant le changement de variable $x = 1 + \sqrt{t}$.

On pose $x = 1 + \sqrt{t}$. Donc $\sqrt{t} = x - 1$ et $(\sqrt{t})^2 = (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$. Donc $t = x^2 - 2x + 1$. Donc on pose $\varphi(x) = x^2 - 2x + 1$ qui est C^1 sur $\mathbb{R}$. Comme $x = 1 + \sqrt{t}$, alors si $t = 0$, alors $x = 1 + \sqrt{0} = 1$ et si $t = 4$, alors $x = 1 + \sqrt{4} = 3$. Comme $dt = \varphi'(x)dx = 2(x-1)dx$, alors

$$\int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{t}} dt = \int_1^3 \frac{2x-2}{x} dx = 2\int_1^3 1 dx - 2\int_1^3 \frac{1}{x} dx$$
$$= 2(3-1) - 2(\ln(3) - \ln(1)) = 4 - 2\ln(3)$$

Changement de variable

Exemple : Soit une fonction continue sur $[-1, 1]$ qui est paire (c'est-à-dire que $f(-x) = f(x)$ pour tout $x \in [-1, 1]$). Montrer que $\int_{-1}^{1} f(x)dx = 2\int_0^1 f(x)dx$.

Démonstration : Par Chasles, $\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{0} f(x)dx + \int_0^1 f(x)dx$. Comme f est paire, alors $\int_{-1}^{0} f(x)dx = \int_{-1}^{0} f(-x)dx$. On pose le changement de variable $t = -x$. Donc $x = -t$ et $dx = -dt$. Quand x vaut 0, alors t vaut 0 et quand x vaut -1 alors t vaut 1. Donc $\int_{-1}^{0} f(-x)dx = \int_1^0 f(t)(-dt) = -\int_1^0 f(t)dt = -(-\int_0^1 f(t)dt) = \int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 f(x)dx$ (car la variable t est muette). Donc

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_0^1 f(x)dx = 2\int_0^1 f(x)dx$$

Primitives de fractions rationnelles

Rappel : on a vu comment calculer la décomposition en éléments pour une fraction rationnelle dont le degré est < 0.

> **Théorème**
> Toute fraction rationnelle P/Q s'écrit $E + R/S$ telle que le degré de R/S est < 0 et où E, R et S sont des polynômes. E est appelé la partie entière de P/Q.

Méthode : On note d le degré de P/Q (c'est-à-dire $\deg(P) - \deg(Q)$). Si $d \geq 0$, on cherche des inconnues telles que $P = EQ + T$ avec E un polynôme de degré d et T un polynôme de degré strictement inférieur strictement au degré de Q.

Primitives de fractions rationnelles

Exemple : Calculer une primitive de $\frac{x^2+1}{x+1}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

On cherche a, b tels que $x^2 + 1 = (ax + b)(x + 1) + c$. En développant on obtient :
$x^2 + 1 = ax^2 + bx + ax + b + c = ax^2 + (a + b)x + b + c$. En identifiant on obient le système : $1 = a$, $a + b = 0$ et $b + c = 1$. Donc $a = 1$, $b = -a = -1$ et $c = 1 - b = 1 - (-1) = 2$. Donc $x^2 + 1 = (1x - 1)(x + 1) + 2$. Ainsi

$$\frac{x^2+1}{x+1} = x - 1 + \frac{2}{x+1}$$

La fraction rationnelle $\frac{2}{x+1}$ est déjà décomposé en éléments simples. Donc une primitive de $\frac{x^2+1}{x+1}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ est :

$$\frac{x^2}{2} - x + 2\ln(|x + 1|)$$

Primitives de fractions rationnelles

Exemple : Calculer une primitive de $\frac{x^2}{x^2-4x+4}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

On cherche a, b, c tels que $x^2 = (a)(x^2 - 4x + 4) + (bx + c)$.
Donc $x^2 = ax^2 - 4ax + 4a + bx + c = ax^2 + (b - 4a)x + (c + 4a)$.
Par identification, $a = 1$, $b - 4a = 0$ et $c + 4a = 0$. Donc $a = 1$, $b = 4a = 4$ et $c = -4a = -4$. Donc
$x^2 = (x^2 - 4x + 4) + (4x - 4)$. Donc

$$\frac{x^2}{x^2 - 4x + 4} = 1 + \frac{4x - 4}{x^2 - 4x + 4}$$

On calcule la décomposition en éléments simples de $\frac{4x-4}{x^2-4x+4}$. Or $\Delta = 4^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 0$. Donc $x^2 - 4x + 4 = (x + \frac{b}{2a})^2 = (x - 2)^2$.
Ainsi on cherche a et b tels que

$$\frac{4x - 4}{x^2 - 4x + 4} = \frac{a}{(x - 2)^2} + \frac{b}{x - 2}$$

Primitives de fractions rationnelles

$$\frac{4x-4}{x^2-4x+4} = \frac{a}{(x-2)^2} + \frac{b(x-2)}{(x-2)^2} = \frac{bx+(a-2b)}{(x-2)^2}$$

Par identification, on en déduit que $b = 4$ et $a - 2b = -4$ donc $a = -4 + 2b = -4 + 8 = 4$. Donc

$$\frac{x^2}{x^2-4x+4} = 1 + \frac{4}{(x-2)^2} + \frac{4}{x-2}$$

Ainsi une primitive est $x - \frac{4}{x-2} + 4\ln(|x-2|)$ sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Moyenne d'une fonction

Définition

La moyenne d'une fonction f continue sur $[a, b]$ est

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

Exemple : La moyenne de x^2 sur $[0, 1]$ vaut $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$.

Exemple : La moyenne de x^2 sur $[0, n]$ vaut $\int_0^n x^2 dx = \frac{n^2}{3}$.

Exemple : La moyenne de x^2 sur $[n, n+1]$ vaut $\int_n^{n+1} x^2 dx = \frac{(n+1)^3 - n^3}{3} = \frac{n^3+3n^2+3n+1-n^3}{3} \sim n^2$.