Intégration : partie 1

- Primitive
- Primitives usuelles
- Aire sous la courbe
- Théorème de positivité et comparaison

Primitives

Définition

Une primitive d'une fonction f définie sur un intervalle I est une fonction F tel que $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$.

Exemple : Une primitive de x^2 sur $\mathbb{R}$ est $x^3/3$.
Une primitive de e^x sur $\mathbb{R}$ est e^x.
Une primitive de $1/x$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est $\ln(x)$.

Attention ! $\ln(x)$ n'est pas une primitive de $1/x$ sur $]-\infty, 0[$ car $\ln(x)$ n'est pas définie sur cet intervalle. Par contre $\ln(-x)$ est une primitive de $1/x$ sur cet intervalle.

Théorème

Si F est une primitive de f, alors toutes les primitives de f sont de la forme $F(x) + C$ avec $C \in \mathbb{R}$.

Exemples : Les primitives de x^2 sur $\mathbb{R}$ sont : $\frac{x^3}{3} + C$ avec $C \in \mathbb{R}$.
Les primitives de e^x sur $\mathbb{R}$ sont : $e^x + C$ avec $C \in \mathbb{R}$.

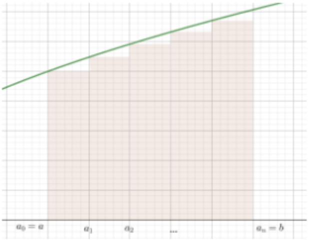
Démonstration du théorème précédent : Soit deux primitives de f qu'on note F et G. Alors $(F - G)' = F' - G' = f - f = 0$. Donc il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $(F(x) - G(x)) = C$. Donc $F(x) = G(x) + C$.

Intégrale de Riemann

Théorème

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. Il existe une primitive F sur f sur $[a, b]$.

Idée démonstration : On montre que la suite $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(a + k\frac{b-a}{n})$ converge et on note $\int_a^b f(x)dx$ cette limite.



Théorème

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, $x_0 \in [a, b]$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. Alors il n'existe qu'une primitive F tel que $F(x_0) = y_0$.

Méthode : Une fois qu'on a la forme de la primitve : $F(x) = g(x) + C$. On résoud l'équation $y_0 = g(x_0) + C$ pour trouver C.

Exemple : Cherchons la primitive de e^x sur $\mathbb{R}$ qui vaut 2 en 1. Les primitives de e^x sont de la forme $e^x + C$. On cherche C tel que $2 = e^1 + C$ donc $C = 2 - e$. Ainsi $F(x) = e^x + 2 - e$ est la primitive de e^x sur $\mathbb{R}$ qui vaut 2 en 1.

Primitives usuelles

Théorème

Les primitives de e^x sur $\mathbb{R}$ sont $e^x + C$.
Pour tout $a \in \mathbb{R}$ différent de -1, les primitives de x^a sur $]0, +\infty[$ sont $\frac{x^{a+1}}{a+1} + C$.
Les primitives de $\frac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$ sont $\ln(x) + C$.

Exemples : Une primitive de $\sqrt{x}$ sur $]0, +\infty[$ est $\frac{x^{3/2}}{3/2} = \frac{2}{3}x^{3/2} = \frac{2}{3}x\sqrt{x}$ $(a = 1/2)$.

Une primitive de x^{n^2+1} sur $]0, +\infty[$ est $\frac{x^{n^2+2}}{n^2+2}$ (où $a = n^2 + 1$ avec n un entier).

Attention ! x^x n'est pas de la forme x^a car l'exposant dans x^x n'est pas une constante.

Opérations élémentaires

Théorème

Soeint f et g deux fonctions continues sur un intervalle I. On note F et G des primitives de ces fonctions. Alors $F + G$ est une primitive de $f + g$ et λF est une primitive de λf.

Démonstration : Comme $(F(x) + G(x))' = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x)$ on en déduit que $F + G$ est une primitive de $f + g$.
Comme $(\lambda F(x))' = \lambda F'(x) = \lambda f(x)$, alors λF est une primitive de f.

Exemple : Une primitive de $e^x + x$ sur $\mathbb{R}$ est $e^x + x^2/2$.

Primitives usuelles

Théorème

Soit u une fonction C^1 sur un intervalle I. Une primitive de $\frac{u'}{u}$ sur I est $\ln(u)$ si $u(x) > 0$ pour tout $x \in I$.
Une primitive de $u'u^a$ sur I est $\frac{u^{a+1}}{a+1}$ si $u(x) > 0$ pour tout $x \in I$.
Une primitive de $u'e^u$ sur I est e^u.

Exemples :
Une primitive de $\frac{2x+1}{x^2+x+1}$ sur $[0, +\infty[$ est $\ln(x^2 + x + 1)$ car $x^2 + x + 1 > 0$ sur $[0, +\infty[$.
Une primitive de $2e^{2x}$ sur $\mathbb{R}$ est e^{2x}.
Une primitive de e^{3x} sur $\mathbb{R}$ est $e^{3x}/3$.

Calcul d'intégrales

Théorème

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ dont on note F une primitive sur $[a, b]$, alors

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

Exemple : $\int_0^1 x^3 dx = [x^4/4]_0^1 = (1^4/4 - 0^4/4) = 1/4$.

Relation de Chasles

Théorème

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, alors :

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$

Exemple : Calculons $\int_{-1}^1 |x|dx$.

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 |x|dx &= \int_{-1}^0 (-x)dx + \int_0^1 xdx = -\int_{-1}^0 xdx + \int_0^1 xdx \\ &= -[\frac{x^2}{2}]_{-1}^0 + [\frac{x^2}{2}]_0^1 = -(\frac{0^2}{2} - \frac{(-1)^2}{2}) + (\frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2}) = 1\end{aligned}$$

Positivité

Théorème

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et positive. Alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

Exemple : $\int_0^1 e^{x^2}(x^2+1)dx \geq 0$

Théorème

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$ telles que $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in [a, b]$, alors :

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

Positivité

Démonstration du second théorème : On pose $h(x) = g(x) - f(x)$. Alors $h(x) \geq 0$ pour tout $x \in [a, b]$. Donc $\int_a^b h(x)dx \geq 0$ (d'après le premier théorème). Or $\int_a^b h(x)dx = \int_a^b (g(x) - f(x))dx = \int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx$. Ainsi

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

Suites d'intégrales

Des fois, on peut s'intéresser à des suites dont la formule est une intégrale mais dont ne connait pas la primitive. Ces suites peuvent néanmoins s'étudier en utilisant certains théorèmes qu'on a vu concernant les suites.

Exemple : On considère la suite $u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} dx$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On va montrer que u_n tend vers 0.
a. Justifier que $\frac{x^n}{1+x^2} \leq x^n$ pour tout $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$.
b. Calculer $\int_0^1 x^n dx$ et calculer la limite lorsque $n \to +\infty$
c. Justifier que $0 \leq u_n$ pour tout n.
d. Conclure.

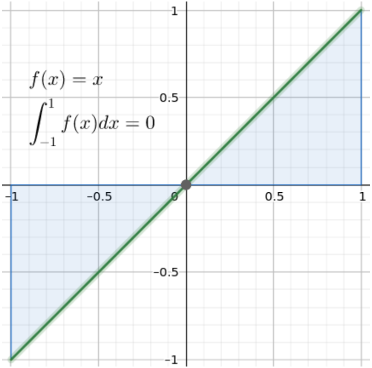
Suites d'intégrales

Exemple : On considère la suite $u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} dx$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On va montrer que u_n tend vers 0.
a. Comme $1 + x^2 \geq 1$ pour tout $x \in [0, 1]$, alors $\frac{1}{1+x^2} \leq \frac{1}{1} = 1$.
Donc en mulitpliant par une quantité positive, on a $\frac{x^n}{1+x^2} \leq x^n$.
b. $\int_0^1 x^n dx = [\frac{x^{n+1}}{n+1}]_0^1 = \frac{1^{n+1} - 0^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{n+1}$.
c. Comme $0 \leq \frac{x^n}{1+x^2}$, alors $0 \leq u_n$.
d. Des questions précédentes, on en déduit que $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$ pour tout n. Or $\frac{1}{n+1}$ converge vers 0. Donc par le théorème des gendarmes, on en déduit que u_n tend vers 0.

Calcul d'aire

Théorème

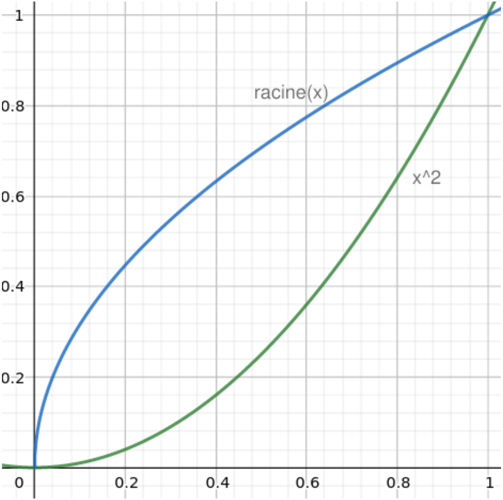
Soit f une fonction positive et continue sur $[a, b]$. Alors $\int_a^b f(x)dx$ est l'aire sous la courbe représentative de f sur l'intervalle $[a, b]$.



Attention ! L'aire calculée par l'intégrale est une aire "algèbrique" : la zone en dessous de l'axe des abscisses est comptée négativement.

Calcul d'aire

Calculer l'aire entre les deux courbes sur $[0, 1]$:



Calcul d'aire

L'aire sous la courbe de x^2 est $\int_0^1 x^2 dx = [x^3/3]_0^1 = 1/3$.
L'aire sous la courbe de $\sqrt{x}$ est $\int_0^1 \sqrt{x} dx$ est $[x\sqrt{x}2/3]_0^1 = 2/3$.
Donc l'aire entre les deux courbes sur $2/3 - 1/3 = 1/3$.