Séries : partie 3

- Dérivation des séries entières
- Développement en série entière usuels
- Application aux probabilités

Dérivation des séries entières

Théorème

La série $\sum a_{n+1}(n+1)x^n$ est appelée **série dérivée** de la série $\sum a_n x^n$. Ces séries ont alors même rayon de convergence (qu'on note R). De plus la fonction somme est dérivable et $\forall x \in]-R, R[$:

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$$

Exemple : La série géométrique $\sum x^n$ est de rayon de convergence 1. De plus $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$. Ainsi

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) x^n$$

pour tout $x \in]-1, 1[$.

Dérivation des séries entières

Méthode (décalage d'indice) :
La règle à retenir pour faire un décalage est : "quand on diminue de 1 le n dans le terme général $(a_n x^n)$, on augmente de 1 le n dans la somme". Et inversement.

Exemple :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^n = \sum_{n=0+1}^{+\infty+1}(n-1+1)x^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}$$

et inversement :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^n = \sum_{n=0-1}^{+\infty-1}(n+1+1)x^{n+1} = \sum_{n=-1}^{+\infty}(n+2)x^{n+1}$$

Dérivation des séries entières

Théorème

Soit $\Sigma a_n x^n$ de rayon de convergence R. Alors la fonction somme $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est définie sur $]-R, R[$ et y est $C^{+\infty}$ et toutes ses dérivées ont R pour rayon de convergence et de plus :

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} a_n \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k}$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $x \in]-R, R[$.

Démonstration : Par récurrence on montre que f est dérivable k fois sur $]-R, R[$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Dérivation des séries entières

Exemple : On a vu que

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \qquad f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n$$

pour tout $x \in]-1,1[$. Ainsi

$$f''(x) = \left(\frac{1}{(1-x)^2}\right)' = \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)nx^{n-1}$$

Donc

$$f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1)x^n$$

pour tout $x \in]-1,1[$.

Lien avec Taylor

Théorème

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence > 0 dont on note f la somme. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

Exemple : Pour $f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$. On voit que

$$f(0) = \frac{1}{1-0} = \sum_{n=0}^{+\infty} 0^n = 1+0+\cdots \qquad f'(0) = \frac{1}{(1-0)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)0^n$$

$$f''(0) = \frac{2}{(1-0)^3} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(n+2)0^n$$

Lien avec Taylor

Démonstration du théorème précédent : Soit $k \in \mathbb{N}$. D'après le théorème de dérivation des séries entières on a :

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} a_n \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k}$$

Alors en particulier pour $x = 0$, on a :

$$\begin{aligned} f^{(k)}(0) &= \sum_{n=k}^{+\infty} a_n \frac{n!}{(n-k)!} 0^{n-k} \\ &= a_k \frac{k!}{(k-k)!} 0^0 + a_{k+1} \frac{(k+1)!}{(k+1-k)!} 0^1 + \cdots \\ &= a_k \frac{k!}{0!} \cdot 1 + 0 + \cdots \end{aligned}$$

(car $0^{n-k} = 0$ si $n - k \geq 1$)
Donc $f^{(k)}(0) = k! a_k$.

Lien avec Taylor

Utilisation : Si on connait la fonction somme d'une série entière, alors on peut en déduire les valeurs de a_n à l'aide des dérivées en 0 de la fonction.

Exemple : Si une série entière $\sum a_n x^n$ est de rayon $+\infty$ et a pour fonction somme la fonction $\exp(x)$, alors $a_0 = f(0)/0! = 1$, $a_1 = f'(0)/1! = 1$, $a_2 = f''(0)/2! = 1/2$, ...

Lien avec Taylor

Dans l'autre sens :

Utilisation : Si on connait l'expression des a_n, alors on peut en déduire directement les dérivées en 0 de f.

Exemple : Soit $f(x)$ la fonction somme de la série entière des nx^n. Alors $f(0) = 0! \cdot 0$, $f'(0) = 1! \cdot 1 = 1$, $f''(0) = 2!2 = 4$, ...

Développement en série entière

Définition

On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ où I est un intervalle ouvert contenant 0 est développable en série entière en 0 s'il existe une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$ telle que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

pour tout $x \in]-R, R[$.

Exemple : La fonction $f(x) = \frac{1}{1-x}$ est développable en série entière en 0 car :

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

DSE usuels

Les fonctions usuels suivantes e^x, $\ln(1+x)$, $\frac{1}{1-x}$ et $(1+x)^a$ admettent un DSE en 0 :

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} \qquad \forall x \in]-1, 1[$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \qquad \forall x \in]-1, 1[$$

$$(1+x)^a = 1+\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}x^n \qquad \forall x \in]-1, 1[, \forall a \in \mathbb{R}$$

Lien avec Taylor

Théorème

Le DSE s'il existe est unique.

Démonstration : Si une fonction f est DSE en 0, alors pour toute série entière $\sum a_n x^n$ tel que $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sur $]-R, R[$, alors $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Utilisation : Si on connait le début du DSE d'une fonction
Si une fonction f admet le début de DSE en 0 suivant :
$f(x) = 2 + 3x + 4x^2 + 5x^3 + \cdots$, alors $f(0) = 2$, $f'(0) = 3$, $f''(0) = 4 \cdot 2! = 8$ et $f^{(3)}(0) = 5 \cdot 3! = 30$.

Lien avec Taylor

Exemple d'utilisation :
Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence 1.
Démontrer que si la somme f de la série entière est impaire (c'est à dire $f(x) = -f(-x)$ pour tout $x \in]-1, 1[$), alors $a_{2n} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration : Comme $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ pour tout $x \in]-1, 1[$, alors
$-f(-x) = \sum_{n=0}^{+\infty} -a_n(-x)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} -a_n(-1)^n x^n$ pour tout $x \in]-1, 1[$. Par unicité du DSE, on en déduit que $a_n = -a_n(-1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En particulier pour tout $n = 2m$ pair :
$a_{2m} = -a_{2m}(-1)^{2m} = -a_{2m}$. Donc $2a_{2m} = 0$ et $a_{2m} = 0$ pour tout $m \in \mathbb{N}$.

Lien avec les probabilités

Définition

Soit X une variable aléatoire à valeurs entières et positives. On appelle **fonction génératrice des probabilités** de X la série entière suivante $\sum \mathbb{P}(X = n)t^n$. On note $G_X(t)$ sa somme.

Exemple : La loi géométrique de paramètre p a pour loi de probabilité : $\mathbb{P}(X = n) = q^{n-1}p$ pour $n \geq 1$. Sa fonction génératrice est $G_X(t) = \frac{pt}{1-qt}$ où $q = 1 - p$. Son rayon de convergence est $1/q$.

Théorème

Si G_X est de rayon de convergence > 1, alors $\mathbb{E}(X) = G'_X(1)$.

Exemple : L'espérance de la loi géométrique est $1/p$.