# Séries : partie 2

- Fractions rationnelles
- Séries téléscopiques
- Séries entières

# Calcul de somme des séries

On va voir qu'on a des formules explicites pour la sommes des séries pours les cas suivants :

- Séries géométriques
- Séries téléscopiques
- Séries issues de fonctions classiques $\rightarrow$ séries entières

# Fractions rationnelles

**Définition**

Une fraction rationnelle est une fonction de la forme $\frac{P(x)}{Q(x)}$ où $P$ et $Q$ sont deux polynômes (avec $Q$ non nul).

**Exemple :**

$$\frac{x+1}{x^3+2}$$

**Utilisation :** Certaines suites peuvent être des suites explicites de fractions rationnelles :

$$\frac{n+1}{n^3+2}$$

# Factorisation des polynômes

**Théorème**
Tout polynôme s'écrit comme produit de polynômes de degré 1 et de polynôme du second degré de discriminant $< 0$.

Cette factorisation, s'appelle la **décomposition en facteurs irréductibles**.

**Exemple :** La factorisation de : $x^3 - x^2 + x - 1 = (x-1)(x^2+1)$ est bien de la forme du théorème car $x - 1$ est degré 1 et car $x^2 + 1$ est de discriminant $-4$ qui est $< 0$.

# Factoriser des polynômes

Le théorème précédent garantit l'existence d'une telle factorisation mais ne dit pas comment l'obtenir.

**Méthode :** Si on nous donne une racine $r$ d'un polynôme $P(x)$ de degré $d$ on peut factoriser $P(x)$ ainsi :

- Introduire des inconnues $a_0, \ldots, a_{d-1}$ telles que $P(x) = (x-r)(a_{d-1}x^{d-1} + \cdots + a_0)$.
- Développer le produit de droite.
- Identifier les coefficients des membres de gauche et de droite.

Pour obtenir la factorisation du théorème, il suffit de répéter ce théorème tant qu'on a un facteur de degré $\geq 3$ ou de degré 2 qui est de discriminant $\geq 0$.

# Factoriser des polynômes

**Exemple :** Factoriser le polynôme $Q(x) = x^3 + 2x^2 + x + 2$ sachant que $-2$ est une racine de $Q(x)$.

On introduit les inconnues $a, b, c$ telles que $Q(x) = (x - (-2))(ax^2 + bx + c)$ (on va jusqu'au degré 2 dans les inconnues pour avoir un produit de degré 3 comme $Q$).
On développe le produit et on rassemble les termes :

$$\begin{aligned} Q(x) &= (x+2)(ax^2 + bx + c) \\ &= ax^3 + bx^2 + cx + 2ax^2 + 2bx + 2c \\ &= ax^3 + (b+2a)x^2 + (c+2b)x + 2c \end{aligned}$$

# Factoriser des polynômes

On identifie les coefficients à gauche et à droite :

$$\begin{aligned} 1 &= a \\ 2 &= b + 2a \\ 1 &= c + 2b \\ 2 &= 2c \end{aligned}$$

D'où $a = 1$, $c = 1$ et $b = 0$. On remplace pour obtenir :
$Q(x) = (x + 2)(x^2 + 1)$.
Comme $x^2 + 1$ est de discriminant $-4 < 0$, on a terminé la factorisation.

# Décomposition en éléments simples

## Théorème

Toute fraction rationnelle $F = P/Q$ où $\deg(P) < \deg(Q)$ et où $Q$ se factorise ainsi :

$$Q = (x-r_1)^{n_1} \cdots (x-r_p)^{n_p} (x^2+\beta_1 x+\gamma_1)^{m_1} \cdots (x^2+\beta_q x+\gamma_q)^{m_q}$$

avec les polynômes $(x^2 + \beta_j x + \gamma_j)$ de discriminant $< 0$. Alors

$$F = F_1 + \cdots + F_p + G_1 + \cdots + G_q$$

où

- $F_i$ s'écrit $\frac{a_{i,1}}{x-r_i} + \cdots + \frac{a_{i,n_i}}{(x-r_i)^{n_i}}$.
- $G_j$ s'écrit $\frac{b_{j,1}x+c_{j,1}}{x^2+\beta_j x+\gamma_j} + \cdots + \frac{b_{j,m_j}x+c_{j,m_j}}{(x^2+\beta_j x+\gamma_j)^{m_j}}$.

# Décomposition en éléments simples

**Méthode :**

- Factoriser $Q$ en décomposition de facteurs irréductibles.
- Ecrire la décomposition en éléments simples avec des inconnues.
- Mettre au même dénominateur la décomposition en éléments simples.
- Identifier les coefficients des numérateurs pour obtenir un système.
- Résoudre le système.

**Exemple :** On considère $\frac{x+1}{x^4+x^2}$. Alors $Q(x) = x^4 + x^2$ se factorise en $x^2(x^2+1)$. On cherche $a, b, c, d$ tels que :

$$\frac{x+1}{x^4+x^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{cx+d}{x^2+1}$$

Après avoir mis au même dénominateur on obtient :

$$\frac{x+1}{x^4+x^2} = \frac{(a+c)x^3 + (b+d)x^2 + ax + b}{x^4+x^2}$$

En identifiant les coefficients des numérateurs, on a :

$$\begin{cases} b & = 1 \\ a & = 1 \\ (b+d) & = 0 \\ (a+c) & = 0 \end{cases}$$

D'où $b = 1$, $a = 1$, $d = -1$ et $c = -1$.

On conclut que : $\frac{1}{x^4+x^2} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{-x-1}{x^2+1}$.

**Exemples :**

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1/2}{x-1} + \frac{-1/2}{x+1}$$

$$\frac{1}{x^2+1} \text{ est déjà décomposé en éléments simples}$$

$$\frac{1}{x^3+2x^2+x+2} = \frac{1/5}{x+2} + \frac{(2-x)/5}{x^2+1}$$

# Séries téléscopiques

**Définition**

Soit $(u_n)$ une suite. On dit que la série des $u_n$ est téléscopique s'il existe une suite $(a_n)$ telle que $u_n = a_{n+1} - a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

**Théorème**

Dans le contexte de la définition précédente, la série des $u_n$ converge si et seulement si la suite des $(a_n)$ converge et dans ce cas

$$\Sigma_{n\geq 0} u_n = \lim_{n\to+\infty} a_n - a_0$$

**Remarque :** Penser à décaler l'indice 0 du théorème si la suite commence à 1.

# Séries téléscopiques

Démonstration : La somme partielle $S_n$ vérifie pour tout $n$ :

$$
\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n \\
&= (a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_n - a_{n-1}) \\
&= (\cancel{a_1} - a_0) + (a_2 - \cancel{a_1}) + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_n - a_{n-1}) \\
&= (\cancel{a_1} - a_0) + (\cancel{a_2} - \cancel{a_1}) + (\cancel{a_3} - \cancel{a_2}) + \cdots + (a_n - \cancel{a_{n-1}}) \\
&= a_n - a_0
\end{aligned}
$$

Ainsi, on voit que si $(a_n)$ converge vers $l$, alors $(S_n)$ converge vers $l - a_0$.

**Exemple :** Calculons la somme $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$.

Ici $u_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$ pour tout $n \geq 1$. On cherche à exprimer $u_n$ de la forme $a_{n+1} - a_n$. On trouve $a_n = \frac{1}{n}$. Donc d'après le théorème précédent, comme $a_n$ tend vers 0,

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = 0 - a_1 = -1/1 = -1$$

## Séries téléscopiques

**Méthode :** Dans le cas de certaines fractions rationnelles, il est possible de faire appraître une série téléscopique en trouvant la décomposition en élément simples de la fraction rationnelle associée.

**Exemple :** Calculons la somme $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(n-1)}$.

Ici $u_n = \frac{1}{n(n-1)}$. En utilisant la méthode de la décomposition en éléments simples on obtient : $\frac{1}{x(x-1)} = \frac{-1}{x} + \frac{1}{x-1}$. Donc $u_n = -\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1}$ pour tout $n$. Il faut maintenant exprimer $u_n$ de la forme $a_{n+1} - a_n$. On trouve $a_n = -\frac{1}{n-1}$. Comme $(a_n)$ converge vers 0, on en déduit d'après le théorème des séries téléscopiques que :

$$\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(n-1)} = 0 - a_2 = -(-\frac{1}{2-1}) = 1$$

# Séries entières

### Définition

Une **série entière** de variable $x$ est une série dont le terme général est de la forme $a_n x^n$ où $(a_n)$ est une suite numérique. Au cas où la série des $a_n x^n$ converge on note la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

**Exemples :**

$$\sum \frac{1}{2^n} x^n \qquad \sum 1 \cdot x^n \qquad \sum \frac{x^n}{n!}$$

Les polynômes sont des séries entières particulières où les termes s'annulent à partir d'un certain rang.

Les séries suivantes ne sont pas entières : $\sum e^{xn}$, $\sum \ln(1 + x^n)$.

# Fonction somme

### Définition

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $\sum a_n x^n$ converge, on peut définir la **fonction somme** qui est définie par :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

**Exemple :** La somme de la série entière $\sum x^n$ (avec $a_n = 1$ pour tout $n \geq 0$) est $\frac{1}{1-x}$.

# Opérations élémentaires

Les opérations élémentaires sur les sommes de séries entières que l'on va voir maintenant vont permettre de calculer les sommes de certaines séries entières à partir de séries entières connues (comme celle de $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ pour $|x| < 1$).

# Opérations élémentaires

### Théorème (Substitution)

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière et $\lambda \in \mathbb{R}$. On note $f$ la fonction somme de cette série. Si la série converge pour $x$ et pour $\lambda x$, alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (\lambda x)^n = f(\lambda x)$$

**Exemple :** Calcul de la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n x^n$ pour $|x| < 1/2$.

En posant $X = 2x$ on obtient :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (2x)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} X^n = \frac{1}{1-X} = \frac{1}{1-2x}$$

Rapppel : on a $\sum_{n=0}^{+\infty} X^n = \frac{1}{1-X}$ que si $|X| < 1$.

# Opérations élémentaires

## Théorème (Multiplication par un scalaire)

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, si elle converge pour un $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda a_n x^n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

## Théorème (Somme)

Soit $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ deux séries entières. Si elles convergent pour un $x \in \mathbb{R}$, alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) x^n$$

# Opérations élémetaires

**Exemple :**
Calculer la somme de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty}(2+\frac{1}{3^n})x^n$ pour $|x|<1$.

On a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}(2+\frac{1}{3^n})x^n &= 2\sum_{n=0}^{+\infty}x^n+\sum_{n=0}^{+\infty}(\frac{x}{3})^n\\ &= 2\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1-\frac{x}{3}}=\frac{2}{1-x}+\frac{3}{3-x}\\ &= \frac{2(3-x)+3(1-x)}{(1-x)(3-x)}=\frac{9-5x}{(1-x)(3-x)}\end{aligned}$$

# Opérations élémentaires

### Théorème (Décalage)

Si la série des $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ converge alors :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1} x^{n+1} = x \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1} x^n$$

**Exemple :** Calculer la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} x^n$ pour $|x| < 1$.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x^n = x \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = x \frac{1}{1-x} = \frac{x}{1-x}$$

# Rayon de convergence

**Définition**

Le rayon de convergence $R$ d'une série entière $\sum a_n x^n$ est défini par :

$$R = \sup\{|x| : \sum a_n x^n \text{converge}\}$$

**Remarque :** Pour le calcul du rayon de convergence, cette définition n'est pas pratique et on utilisera la règle de d'Alembert.

**Exemple :** Les polynômes sont de rayon de convergence $+\infty$.

# Rayon de convergence

> **Théorème**
> La fonction somme $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est définie sur $]-R, R[$.

Cela veut dire que la série converge pour tout $x \in ]-R, R[$.

Par exemple, comme les polynômes sont de rayon de convergence $+\infty$, alors ils sont définis sur $]-\infty, +\infty[$.

# Règle de d'Alembert

**Théorème**
Si $\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = L$, alors $R = 1/L$.

**Exemple :** La série entière $\sum 2^n x^n$ a pour rayon de convergence $1/2$. En effet ici $a_n = 2^n$ pour tout $n \geq 0$. Donc $a_{n+1}/a_n = 2^{n+1}/2^n = 2$ qui converge vers 2. Donc $R = 1/2$.

**Remarque :** Ce théorème ne s'utilise que si les termes ne s'annulent pas (comme dans le cas des polynômes).