Séries : partie 1

- Définition
- Séries de références
- Théorèmes de comparaisons
- Théorème des séries alternées

Définition

Soit (u_n) une suite. On appelle série de terme général (u_n) la suite (S_n) définie par $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ (qu'on appelle sommes partielles).

Exemples : Pour $u_n = n$. Les premiers termes de la série associée sont : $0, 1, 3, 6, 10$.

Pour $u_n = 1$, les premiers termes sont $1, 2, 3, 4, 5$.

Séries arithmétiques et géométriques

Théorème (Série arithmétique)

Soit $u_n = n$, alors la somme partielle associée est :

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Théorème (Série géométrique)

Soit $u_n = q^n$, alors somme partielle associée est :

$$S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

si $q \neq 1$ et $S_n = (n+1)$ si $q = 1$.

Variations d'une série

Théorème

Soit (u_n) une suite. On note (S_n) la suite des sommes partielles associées.

- Si (u_n) est positive à partir d'un certain rang, alors (S_n) est croissante à partir de ce rang.
- Si (u_n) est négative à partir d'un certain rang, alors (S_n) est décroissante à partir de ce rang.

Remarque : Le théorème avec des "stricts" est aussi valable.

Exemple : La série de terme général n^2 est croissante. La série de terme général -1 est décroissante.

Méthode : En général il faut étudier le signe du terme général. S'il s'agit d'une suite explicite, on peut faire un tableau de signe.

Convergence

Définition

On dit qu'une série de terme général u_n converge si la suite de ses sommes partielles converge. Dans ce cas la limite s'appelle la **somme** de la série et on la note : $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$.

Sinon on dit qu'elle diverge. Dans le cas où la suite des sommes partielles diverge vers $+\infty$, on dit que la série diverge vers $+\infty$.

Exemples : La série de terme général 1 diverge vers $+\infty$. La série de terme général -1 diverge. La série de terme général $1/2^n$ converge vers 2. Si $|q| < 1$, alors $\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$.

Définition : Étudier la nature d'une série c'est déterminer si elle converge ou non.

Séries de références

Ce sont des séries de terme général simple dont on connait la nature (convergence ou divergence) et que l'on va utiliser pour étudier des séries plus compliquées.

- Séries arithmétiques $u_n = n$
- Séries géométriques $u_n = q^n$
- Séries de Riemann $u_n = \frac{1}{n^a}$
- Séries de Bertrand $u_n = \frac{1}{n^a \ln(n)^b}$

Théorème

Soit $a \in \mathbb{R}$, la série des $\frac{1}{n^a}$ converge si et seulement si $a > 1$.

Théorème

Soit $a \in \mathbb{R}$, la série des $\frac{1}{n^a \ln(n)^b}$ converge si et seulement si $a > 1$ ou $a = 1$ et $b > 1$.

Exemples : $1/n$ et $1/(n \ln(n))$ divergent. $1/n^2$ et $1/(n \ln(n)^2)$ convergent.

Règles de convergence

Théorème

Si (u_n) est une suite positive à partir d'un certain rang, alors la série associée converge ou diverge vers $+\infty$.

Car la suite des sommes partielles est croissante à partir d'un certain rang.

Utilisation : La plupart des suites que l'on va voir sont positives à partir d'un certain rang. Aini il sera question de savoir si les séries convergent ou divergent vers $+\infty$.

Règles de convergence

Théorème

Soient (u_n) et (v_n) deux suites.

- Si les deux séries associées convergent, alors la série des $au_n + bv_n$ converge pour tout $a, b \in \mathbb{R}$.
- Si une série converge converge et l'autre diverge, alors la série des $u_n + v_n$ diverge.

Remarque : Si les deux divergent on ne peut rien dire (n et $-n$).

Exemples : La série des $\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}$ converge. La série des $n - \frac{1}{2^n}$ diverge.

Règles de convergence

Théorème

Si la série de terme général u_n converge, alors u_n converge 0.

Utilisation : La contraposée permet de montrer que des séries ne convergent pas. Si u_n ne converge pas vers 0, on dit que la série diverge grossièrement.

Exemple : Comme $\frac{n+1}{n}$ converge vers 1, on en déduit que la série des $\frac{n+1}{n}$ diverge.

Théorèmes de comparaison

Théorème

Si à partir d'un certain rang $0 \leq u_n \leq v_n$, alors

- Si la série des v_n converge, alors la série des u_n converge.
- Si la série des u_n diverge, alors la série des v_n diverge.

Exemple : Comme $\frac{1}{n2^n} \leq \frac{1}{2^n}$, alors la série des $\frac{1}{n2^n}$ converge (car celle des $1/2^n$ converge comme série géométrique de raison $|q| < 1$).

Théorèmes de comparaison

Théorème

Soient (u_n) et (v_n) deux suites positives à partir d'un certain rang.

- Si $v_n = O(u_n)$ et la série des u_n converge, alors la série des v_n converge.
- Si $u_n \sim v_n$, alors la série des u_n converge si et seulement si la série des v_n converge.

Exemple : Comme $\frac{1}{n2^n} = O(\frac{1}{2^n})$, alors la série des $\frac{1}{n2^n}$ converge (car celle des $1/2^n$ converge comme série géométrique de raison $|q| < 1$).
Exemple : Comme $\frac{1}{2^n} \sim \frac{n+1}{n}\frac{1}{2^n}$ alors la série des $\frac{n+1}{n}\frac{1}{2^n}$ est convergente.

Théorèmes de comparaison

Méthode : Utiliser un développement asymptotique du terme général pour en déduire un équivalent de la forme $\frac{1}{n^a}$ pour en déduire la nature de la série à partir des séries de Riemann.

Exemple : $\ln(1+\frac{1}{n}) \sim \frac{1}{n}$ or la deuxième série diverge (Riemann) donc la série de gauche diverge.

Exemple : $\ln(1+\frac{1}{n}) - 2\ln(1+\frac{1}{2n}) \sim \frac{C}{n^2}$ or la deuxième série converge (Riemann) donc la série de gauche converge.

Définition

Une série alternée est une série dont le terme général est du type $(-1)^n a_n$ où (a_n) est une suite positive.

Théorème

Si la suite (a_n) tend vers 0 et est décroissante à partir d'un certain rang, alors la série des a_n est convergente. En notant $S = \sum_{k\geq 0}(-1)^k a_k$, on a de plus que

$$|\sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k - S| \leq a_{n+1}$$

Exemple : La série des $(-1)^n \frac{1}{n}$ est convergente.

Utilisation : L'inégalité précédente mesure la précision de l'approximation comme dans le théorème du point fixe et permet de déduire les décimales de la somme S.