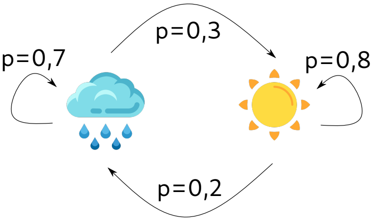
Suites : partie 3

- Théorème du point fixe
- Développement asymptotique de suite
- Suites arithmético-géométriques



Théorème

Soit (u_n) et (v_n) deux suites telles que $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang.

- Si les deux suites sont convergentes, alors $\lim u_n \leq \lim v_n$.
- Si (u_n) diverge vers $+\infty$, alors (v_n) diverge vers $+\infty$.
- Si (v_n) diverge vers $-\infty$, alors (u_n) diverge vers $-\infty$.

Exemple : montrer que $n + \ln(n)$ diverge vers $+\infty$ en utilisant que n diverge vers $+\infty$.

Théorème (des gendarmes)

Soient (u_n), (v_n) et (w_n) des suites telles que $u_n \leq v_n \leq w_n$. Si (u_n) et (w_n) convergent vers la même limite l, alors (v_n) converge vers l.

Dans toute la suite $f : E \to \mathbb{R}$ sera une fonction C^1 où E est son ensemble de définition.

Définition

On dit qu'un intervalle I de E est stable par f si $f(I) \subseteq I$.

Méthode : Pour savoir si un intevalle est stable par f, en général on étudie les variations de la fonction f sur cet intervalle.

Exemple : Pour $f(x) = x^2$. Le tableau de variation est le suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x) = x^2$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

Comme $f(1) = 1$, alors $f([0,1]) = [0,1] \subseteq [0,1]$ donc $[0,1]$ est stable par f. L'intervalle $[-2,2]$ n'est pas stable car $f([-2,2]) = [0,4]$ qui n'est pas inclus dans $[-2,2]$.

Étude graphique de la stabilité

Pour que l'intervalle $[a, b]$ soit stable, il faut que la restriction à $[a, b]$ de la courbe représentative de f soit dans le carré $[a, b] \times [a, b]$.

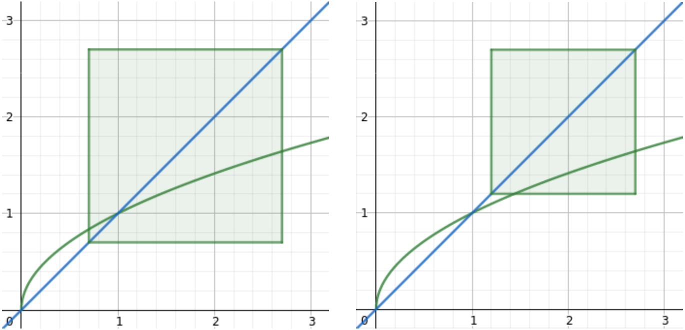


Figure: La droite bleue est la fonction $y = x$. La courbe verte est la fonction f. Stable à gauche. Pas stable à droite à cause de $f(1, 2)$ qui n'est pas dans le carré.

Point fixe

Définition

On dit que $a \in \mathbb{R}$ est un point fixe de f si $f(a) = a$.

Méthode : Pour trouver les points fixes, en général on étudie $g(x) = f(x) - x$ pour trouver les a où $g(a) = 0$ (soit par calcul algébrique, soit avec le TVI).

Exemple : Pour $f(x) = x^2$. On résoud $x^2 = x$ et on trouve 0 et 1 comme points fixes (méthode algébrique).

Exemple : Pour $f(x) = e^x - x - 2$. On étudie les variations de $g(x) = f(x) - x = e^x - 2x - 2$ qui décroit sur $]-\infty, \ln(2)[$ puis croit. Comme $g(\ln(2)) = -2\ln(2) < 0$, et que $g(x)$ tend vers $+\infty$ en $-\infty$ et en $+\infty$, alors g admet deux zéros d'après le TVI. Et donc f admet deux points fixes sur $\mathbb{R}$.

Définition

Soit $k \in [0, 1[$. On dit qu'une fonction est k-contractante sur I si

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$$

pour tout x, y dans I

Théorème

Si $|f'(x)| \leq k$ pour tout $x \in I$, alors f est k-contractante.

Utilisation : Pour montrer que f est k-contractante, il suffit de montrer que $|f'|$ est majorée sur I.

Étude graphique de la contractivité

Ayant la courbe représentative de la dérivée de la fonction f, il suffit de regarder le maximum de $|f'|$ sur l'intervalle considéré. Si ce maximum est $k < 1$, alors la fonction est k-contractante. Sinon elle n'est pas contractante.

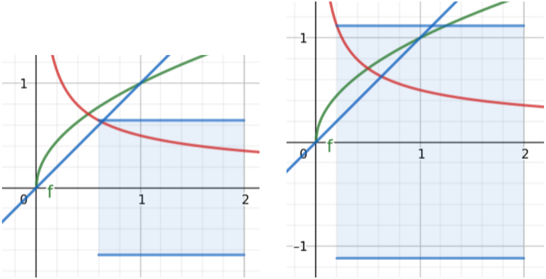


Figure: En vert une fonction et en rouge sa dérivée. À gauche la fonction est contractante sur l'intervalle alors qu'elle ne l'est pas sur l'intervalle de droite.

Définition

On dit qu'un point fixe a est

- répulsif si $|f'(a)| > 1$,
- attractif si $|f'(a)| < 1$.

Exemple : La fonction $f(x) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^3}{3}$ admet trois points fixes sur $\mathbb{R}$: 2 répulsifs et 1 attractif.

Théorème

Soit une suite (u_n) récurrente d'ordre 1 : $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si I est un intervalle stable par f et que $u_0 \in I$, alors (u_n) est bien définie et $u_n \in I$ pour tout $n \in I$.
De plus, si la suite (u_n) est convergente, alors elle converge vers un point fixe appartenant à I de f.

Remarques :

Si la fonction n'admet aucun point fixe, alors on sait tout de suite que la suite diverge (mais on ne sait pas si elle diverge vers $\pm\infty$ ou pas).

Si la fonction n'a qu'un point fixe dans I, alors on sait tout de suite que si la suite converge, alors c'est vers ce point fixe.

Théorème (du point fixe de Banach ou Picard)

Si f est k-contractante, alors f admet un unique point fixe a et la suite (u_n) précédente converge vers a. Plus précisément :

$$|u_n - a| \leq \frac{k^n}{1-k}|u_1 - u_0|$$

Utilisation : cette majoration que l'on peut qualifier de "précision de l'approximation de a par la suite (u_n)" permet de s'assurer que l'on a bien calculé les premières décimales de a à l'aide de u_n.
En effet si on note $p = \frac{k^n}{1-k}|u_1 - u_0|$, alors $a \in [u_n - p, u_n + p]$. Si les deux bornes de cet intervalle commence par les mêmes décimales, alors on est certain que ce sont les premières décimales de a.
Exemple : Si $n = 20$, $p = 0,001$ et $u_n = 1,234567$, alors $a \in [1,2334567; 1,235567]$ et a commence par $1,23$.

Théorème

Si a est un point fixe attractif, alors il existe un interalle J contenant a tel que si $u_0 \in J$, (u_n) converge vers a.
Si a est un point fixe répulsif, alors (u_n) ne converge pas vers a (à moins que $u_0 = a$).

Exemple : La fonction $f(x) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^3}{3}$ admet trois points fixes : 2 répulsifs et 1 attractif.

Définition

Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques telles que v_n ne s'annule pas. On dit que

- (u_n) est dominée par (v_n) si $u_n \leq M v_n$ à partir d'un certain rang : on note cela $u_n = O(v_n)$.
- (u_n) est négligeable devant (v_n) si $\frac{u_n}{v_n}$ converge vers 0 : on note cela $u_n = o(v_n)$.
- (u_n) est équivalent à (v_n) si $\frac{u_n}{v_n}$ converge vers 1 : on note cela $u_n \sim v_n$.

Exemples : $n^a = o(n^b)$ si et seulement si $a < b$.
$\ln^a(n) = o(n^b)$ pour tout $b > 0$.
$n^a = o(e^{bn})$ pour tout $b > 0$.
Tout polynôme en n est équivalent à son terme de plus haut degré.

Théorème

Soient f et g deux fonctions réelles. Si f est équivalent à g en $+\infty$, alors $f(n)$ est à $g(n)$.

Théorème

Si $u_n \sim v_n$ et $x_n \sim y_n$ alors $u_n x_n \sim v_n y_n$.
Si $u_n \sim v_n$, alors $\frac{1}{u_n} \sim \frac{1}{v_n}$.

Erreur classique : On ne peut pas sommer des équivalents en règle générale.

Théorème

Si $u_n = o(w_n)$ et $v_n = o(w_n)$, alors $u_n + v_n = o(w_n)$.
Si $u_n = o(v_n)$ et $v_n = o(w_n)$, alors $u_n = o(w_n)$.
Si $u_n = o(w_n)$, alors $u_n v_n = o(w_n v_n)$.

Exemple : $\frac{n^2+\sqrt{n}+1}{e^n-n^2} \sim \frac{n^2}{e^n}$

Méthode : Pour obtenir un développement asymptotique d'une suite explicite $f(n)$, on calcule un développement asymptotique de $f(x)$ en $+\infty$ et on remplace x par n.

Exemple : $u_n = \frac{e^n}{n}$ on étudie $f(x) = \frac{e^x}{x}$ en posant $x = 1/t$:

$$\frac{e^x}{x} = te^{1/t} = t(1+t+\frac{t^2}{2}+o_{t\to 0}(t^2)) = \frac{1}{x}(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+o_{x\to+\infty}(\frac{1}{x^2}))$$

On en déduit que $u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2n^3} + o(\frac{1}{n^3})$.

Suite arithmético-géométrique

Définition

Une suite arithmético-géométrique est une suite récurrente d'ordre 1 dont la fonction est $f(x) = qx + r$. Autrement dit, (u_n) est arithmétique si elle vérifie que $u_{n+1} = qu_n + r$ avec $u_0 \in \mathbb{R}$.

Remarque : Si $q \neq 1$, la fonction $f(x) = qx + r$ n'admet qu'un unique point fixe : $\frac{r}{1-q}$.

Remarque : Si $q = 1$, c'est une suite arithmétique de raison r. Si $r = 0$, c'est une suite géométrique de raison q.

Méthode : Pour étudier une telle suite, on considère la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - c$ où $c = \frac{r}{1-q}$ si $q \neq 1$ (si $q = 1$, c'est une suite arithmétique). Cette suite est géométrique car
$v_{n+1} = u_{n+1} - c = qu_n + r - c = qu_n + r - \frac{r}{1-q} = q(u_n - c) = qv_n$

Ainsi $v_n = q^n v_0 = q^n(u_0 - c)$. Donc

$$u_n = q^n(u_0 - c) + c$$

De cette formule explicite, on peut en déduire la limite et les variations.