Suites : partie 2

Théorème

Toute suite convergente est bornée.

La réciproque est fausse : considérer la suite $(-1)^n$.

Définition

On dit qu'une suite (u_n) diverge vers $+\infty$ si elle vérifie :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N} \colon \forall n \geq n_0, u_n \geq A$$

Théorème

Toute suite croissante converge ou diverge vers $+\infty$.

Théorème

Toute suite croissante et majorée converge.

Théorème

Toute suite qui diverge vers $+\infty$ n'est pas majorée.

La réciproque est fausse (toute suite non majorée ne diverge pas forcément vers $+\infty$) : considérer $(-1)^n n$.

Théorème (Somme des limites)

Soient (u_n) et (v_n) deux suites dont on étudie la limite de leur somme.

$u_n + v_n$	l	$+\infty$	-∞
l'	l+l'	$+\infty$	-∞
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	FI
- ∞	-∞	FI	-∞

- Si les deux suites convergent, alors la limite est la somme des limites.
- Si l'une converge et l'autre diverge vers $\pm\infty$, alors la somme diverge vers $\pm\infty$.
- Si les deux divergent vers le même infini, alors la somme diverge vers cet infini.

Théorème (Produit des limites)

Soient (u_n) et (v_n) deux suites dont on étudie la limite de leur produit.

$u_n \times v_n$	l $\neq 0$	0	$+\infty$	-∞
l' $\neq 0$	l$\times l'$	0	signe(l') ∞	-(signe(l'))∞
0	0	0	FI	FI
$+\infty$	signe(l)∞	FI	$+\infty$	-∞
- ∞	-(signe(l))∞	FI	-∞	$+\infty$

- Si les deux suites convergent, alors le produit converge vers le produit des limites.
- Si l'une converge vers une limite non nulle ou diverge vers $\pm\infty$ et l'autre diverge vers $\pm\infty$, alors le produit diverge vers l'infini avec un signe à déterminer en fonction des signes en jeu.
- Sinon FI.

Théorème (Quotient des limites)

Soient (u_n) et (v_n) deux suites dont on étudie la limite de leur quotient. On suppose que (v_n) ne s'annule pas et est de signe constant.

u_n/v_n	l $\neq 0$	0	$+\infty$	-∞
l' $\neq 0$	l / l'	0	signe(l') ∞	-(signe(l'))∞
0	$\pm\infty$	FI	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$+\infty$	0	0	FI	FI
- ∞	0	0	FI	FI

- Si une suite diverge vers $\pm\infty$, alors son inverse converge vers 0.
- Si une suite de signe constant converge vers 0, alors son inverse diverge vers $\pm\infty$.
- Sinon FI.

Définition (Valeur d'adhérence)

Une valeur d'adhérence d'une suite est une limite d'une suite extraite.

Exemples : $(-1)^n$ a deux valeurs d'adhérence : 1 et -1. La suite n^2 n'a pas de valeur d'adhérence.

Théorème

Toute suite qui converge admet une unique valeur d'adhérence (la limite de cette suite).

Utile pour montrer qu'une suite ne converge pas : par exemple $(-1)^n$.

Théorème

Toute suite bornée admet au moins une valeur d'adhérence.

$\rightarrow$ permet de montrer qu'une suite a une valeur d'adhérence sans avoir besoin de trouver une bonne suite extraite.

Théorème

Toute suite est non majorée (resp. minorée) si et seulement elle admet une suite extraite qui diverge vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).

$\rightarrow$ permet de montrer qu'une suite n'est pas majorée en trouvant une bonne suite extraite qui diverge vers $+\infty$.

Définition (Suite arithmétique)

Une suite (u_n) est arithmétique de raison r, si $u_{n+1} - u_n = r$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Autrement dit, (u_n) est arithmétique si elle est définie par une récurrence de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = x + r$.

Théorème

Une suite (u_n) est arithmétique de raison r si et seulement si $u_n = u_0 + nr$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Théorème

Soit une suite arithmétique de raison r.

- Si $r = 0$, alors la suite est constante.
- Si $r > 0$, alors la suite est strictement croissante et diverge vers $+\infty$.
- Si $r < 0$, alors la suite est strictement décroissante et diverge vers $-\infty$.

Définition (Suite géométrique)

Une suite (u_n) est géométrique de raison q, si tous ses termes sont non nuls $u_{n+1}/u_n = q$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Autrement dit, (u_n) est géométrique si elle est définie par une récurrence de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = qx$.

Théorème

Une suite (u_n) est géométrique de raison q si et seulement si $u_n = u_0 q^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Théorème

Soit une suite géométrique de raison q.

- Si $q = 1$, alors la suite est constante.
- Si $|q| < 1$, alors converge vers 0.
- Si $|q| > 1$, alors diverge. Plus précisement, si $q > 1$, la suite est monotone et diverge vers $\pm\infty$ selon le signe de u_0; si $q < -1$, la suite est alternée et la suite extraite des rangs pairs diverge vers $\pm\infty$ comme la suite extraite des rangs impairs.

Théorème

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r, alors

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{(u_0 + u_n)(n+1)}{2}$$

Théorème

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \neq 1$, alors

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$$