Intégration : partie 3

- Théorème d'équivalence.
- Liens entre séries et intégrales de Riemann.
- Variable aléatoire à densité.

Théorème d'équivalence

Théorème

Soient f et g deux fonctions positives et continues sur $[1,+\infty[$. Si $f(x)$ est équivalent à $g(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$, alors les intégrales $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ et $\int_1^{+\infty} g(x)dx$ ont même nature.

Exemple : $\frac{x+1}{2x+1}e^{-x}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$.

Exemple : $\frac{2x+1}{x^2+3}$ n'est pas intégrable sur $[1,+\infty[$.

Théorème d'équivalence

Exemple : $\frac{x+1}{2x+1} \sim \frac{x}{2x} \sim \frac{1}{2}$ lorsque $x \to +\infty$. Donc $\frac{x+1}{2x+1}e^{-x} \sim \frac{1}{2}e^{-x}$. Or $\frac{1}{2}e^{-x} = \frac{1}{2}a^x$ avec $a = \frac{1}{e}$. Or $a < 1$ car $e > 1$. Donc $\frac{1}{2}e^{-x}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$. Donc $\frac{x+1}{2x+1}e^{-x}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Exemple : $\frac{2x+1}{x^2+3} \sim \frac{2}{x}$ n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$ car c'est une intégrale de Riemann avec $\frac{2}{x^a}$ et $a = 1 \not> 1$. Donc $\frac{2x+1}{x^2+3}$ n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$.

Théorème d'équivalence

Théorème

Soient f et g deux fonctions et continues sur $]0,1]$ et de signe constant au voisinage de 0. Si $f(x)$ est équivalent à $g(x)$ lorsque x tend vers 0, alors les intégrales $\int_0^1 f(x)dx$ et $\int_0^1 g(x)dx$ ont même nature.

Exemple : $\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}+x^2}$ est intégrable sur $]0,1]$.

Exemple : $\frac{e^{-x}}{x+x^2}$ n'est pas intégrable sur $]0,1]$.

Théorème d'équivalence

Exemple : $\sqrt{x} + x^2 \sim \sqrt{x}$ lorsque $x \to 0$ et non pas $\sim x^2$. (En effet on a $\frac{\sqrt{x}+x^2}{\sqrt{x}} = 1 + x\sqrt{x} \to 1$ lorsque $x \to 0$). De plus $e^{-x} \sim e^{-0} = 1$ lorsque $x \to 0$. Donc $\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}+x^2} \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$. Or $\frac{1}{\sqrt{x}} = 1/x^{1/2} = 1/x^a$ avec $a = 1/2$. Comme $a < 1$, alors $\frac{1}{\sqrt{x}}$ est intégrable sur $]0,1]$. Donc $\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}+x^2}$ est intégrable sur $]0,1]$.

Exemple : $e^{-x} \sim e^{-0} = 1$ lorsque $x \to 0$ et $x + x^2 \sim x$ lorsque $x \to 0$. Donc $\frac{e^{-x}}{x+x^2} \sim \frac{1}{x}$ lorsque $x \to 0$. Or $1/x = 1/x^a$ avec $a = 1 \not> 1$. Donc $1/x$ n'est pas intégrable sur $]0,1]$. Donc $\frac{e^{-x}}{x+x^2}$ n'est pas intégrable sur $]0,1]$.

Théorème d'équivalence : utlisation de DA

Une méthode possible pour obtenir un équivalent est d'utiliser un développement asymptotique à un terme.

Exemple : $e^{1/x} - e^{-1/x}$ n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$.

On pose $X = 1/x$. Si $x \to +\infty$, alors $X \to 0$. Donc $e^X = 1 + X + o(X)$ lorsque $X \to 0$. Donc $e^{\frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{x} + o(\frac{1}{x})$ lorsque $x \to +\infty$. De même on pose $X = -1/x$. Si $x \to +\infty$, alors $X \to 0$. Donc $e^X = 1 + X + o(X)$ lorsque $X \to 0$. Donc $e^{-\frac{1}{x}} = 1 - \frac{1}{x} + o(\frac{1}{x})$. Donc

$$e^{\frac{1}{x}} - e^{-\frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{x} - (1 - \frac{1}{x}) + o(\frac{1}{x}) = \frac{2}{x} + o(\frac{1}{x})$$

Donc $e^{1/x} - e^{-1/x} \sim \frac{2}{x}$ lorsque $x \to +\infty$. Or $2/x$ n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$, donc $e^{1/x} - e^{-1/x}$ n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$.

Théorème d'équivalence : utilisation de DA

Exemple : $2ln(1+\frac{1}{x}) - ln(1+\frac{2}{x})$ est intégrable sur $[1,+\infty[$.

$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ lorsque $x \to 0$. On pose $X = 1/x$. Si $x \to +\infty$, alors $X \to 0$. Donc $\ln(1+X) = X - \frac{X^2}{2} + o(X^2)$ et $\ln(1+\frac{1}{x}) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + o(\frac{1}{x^2})$. De même, $X = 2/x$, si $x \to +\infty$, alors $X \to 0$. Donc $\ln(1+\frac{2}{x}) = \frac{2}{x} - \frac{2^2}{2x^2} + o(\frac{1}{x^2}) = \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2} + o(\frac{1}{x^2})$. Ainsi

$$\begin{aligned} 2\ln(1+\frac{1}{x}) - \ln(1+\frac{2}{x}) &= 2(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + o(\frac{1}{x^2})) - (\frac{2}{x} - \frac{2}{x^2} + o(\frac{1}{x^2})) \\ &= -\frac{1}{x^2} + o(\frac{1}{x^2}) \end{aligned}$$

On en déduit que $2\ln(1+\frac{1}{x}) - \ln(1+\frac{2}{x}) \sim -\frac{1}{x^2}$. Comme $\frac{1}{x^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$, alors $2\ln(1+\frac{1}{x}) - \ln(1+\frac{2}{x})$ est intégrable sur $[1,+\infty[$.

Séries de Riemann

Rappel :

Théorème
La série $\sum_n \frac{1}{n^a}$ est convergente si et seulement si $a > 1$.

Théorème
La fonction $\frac{1}{x^a}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ si et seulement si $a > 1$.

Le théorème des intégrales a déjà été démontré avec les primitives de $\frac{1}{x^a}$. On va démontrer le théorème des séries avec les intégrales.

Séries de Riemann

Démonstration : Soit $a > 0$. On considère la fonction $f(x) = \frac{1}{x^a}$. Alors $f'(x) = (x^{-a})' = -ax^{-a-1} = \frac{-a}{x^{a+1}} < 0$ Donc f est décroissante sur $[1, +\infty[$.

Donc $f(k+1) \leq f(x) \leq f(k)$ pour tout $x \in [k, k+1]$.

Donc $\int_k^{k+1} f(k+1)dx \leq \int_k^{k+1} f(x)dx \leq \int_k^{k+1} f(k)dx$. Donc $f(k+1)[x]_k^{k+1} \leq \int_k^{k+1} f(x)dx \leq f(k)[x]_k^{k+1}$. Donc $f(k+1) \cdot 1 \leq \int_k^{k+1} f(x)dx \leq f(k) \cdot 1$.

En sommant ces inégalités pour $1 \leq k \leq n$, on obtient $\sum_{k=1}^n f(k+1) \leq \int_1^{n+1} f(x)dx \leq \sum_{k=1}^n f(k)$. Par décalage, d'indice on obtient : $\sum_{k=2}^{n+1} f(k) \leq \int_1^{n+1} f(x)dx \leq \sum_{k=1}^n f(k)$.

On note $S_n = \sum_{k=1}^n f(k) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^a}$ la somme partielle de la série des $\frac{1}{k^a}$. Ainsi d'après l'inégalité précédente, on a : $S_{n+1} - f(1) \leq \int_1^{n+1} f(x)dx \leq S_n$.

Séries de Riemann

Or
$\int_1^{n+1} f(x)dx = \int_1^{n+1} \frac{1}{x^a} dx = [\frac{1}{-a+1} x^{-a+1}]_1^{n+1} = \frac{(n+1)^{-a+1}}{-a+1} - \frac{1}{-a+1}$.
Donc

$$S_{n+1} \leq f(1) + \int_1^{n+1} f(x)dx = 1 + \frac{(n+1)^{-a+1}}{1-a} + \frac{1}{a-1}$$

Si $a > 1$, alors $-a+1 < 0$ donc $\frac{(n+1)^{-a+1}}{-a+1} < 0$ et donc $S_{n+1} \leq 1 + \frac{1}{a-1}$. Ainsi (S_n) est majorée. Or (S_n) est une suite croissante (car somme de termes positifs). Donc (S_n) est croissante et majorée et donc converge.

Si $a < 1$, alors $\frac{(n+1)^{-a+1}}{-a+1} + \frac{1}{a-1}$ tend vers $+\infty$. Comme $\frac{(n+1)^{-a+1}}{-a+1} + \frac{1}{a-1} \leq S_n$, on en déduit que (S_n) diverge vers $+\infty$.

Variable aléatoire à densité

Définition

Une variable aléatoire réelle X est dite à densité s'il existe une fonction f positive et intégrable sur $\mathbb{R}$, appelée fonction de densité, telle que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ on ait

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(t)dt$$

Dans ce cas on a $\int_{\mathbb{R}} f(t)dt = 1$ et $\mathbb{P}(X = a) = 0$.

Si $tf(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, alors X admet une espérance qui vaut

$$\mathbb{E}(X) = \int_I tf(t)dt$$

Variable aléatoire à densité

Exemple : La loi normale est définie par la fonction de densité $f(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2}$. On peut montrer que $\int_{\mathbb{R}} f(t)dt = 1$ mais pas avec les théorèmes de ce cours.

L'espérance de la loi normale existe et vaut 0. En effet : $\int_0^x \frac{1}{\sqrt{\pi}} te^{-t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} [\frac{e^{-t^2}}{-2}]_0^x = \frac{1}{\sqrt{\pi}} (\frac{e^{-x^2}}{-2} - \frac{1}{-2}) \to \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{2}$ lorsque $x \to +\infty$. Donc $\frac{1}{\pi} te^{-t^2}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ et $\int_0^{+\infty} tf(t)dt = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\pi}}$.

De même : $\int_x^0 \frac{1}{\sqrt{\pi}} te^{-t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} [\frac{e^{-t^2}}{-2}]_x^0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} (\frac{1}{-2} - \frac{e^{-x^2}}{-2}) \to -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{2}$ lorsque $x \to -\infty$. Donc $\frac{1}{\pi} te^{-t^2}$ est intégrable sur $]-\infty, 0]$ et $\int_{-\infty}^0 tf(t)dt = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\pi}}$.

Donc
$\int_{\mathbb{R}} tf(t)dt = \int_{-\infty}^0 tf(t)dt + \int_0^{+\infty} tf(t)dt = -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\pi}} + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\pi}} = 0.$