L3 Algèbre

Lucas Isenmann

Université Paul-Valéry, Montpellier

1 Diagonalisation

1.1 Valeur propre

Définition 1.1. Soit A une matrice carrée, une valeur propre de A est un nombre λ tel qu'il existe un vecteur X non nul tel que $AX = \lambda X$.

Exemple 1.1.1. Comme

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 \\ 2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

alors 3 est une valeur propre pour la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Méthode 1.1.1. Pour vérifier si $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre d'une matrice carré A.

Cela revient à résoudre le système linéaire $AX = \lambda X$ pour essayer de trouver un vecteur non nul X solution. Si X est forcément nul, alors λ n'est pas une valeur propre de A. Si on trouve un X non nul solution (en fixant arbitrairement un coefficient), alors λ est une valeur propre.

Exemple 1.1.2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Regardons si 1 et 2 sont des valeurs propres.

On commence par regarder si 1 est une valeur propre. On résoud le système suivant : $\begin{cases} x + y = 1 \cdot x \\ y = 1 \cdot y \end{cases}$ Ce qui se simplifie en : $\begin{cases} y = 0 \\ y = y \end{cases}$. Donc x est une variable libre et y doit valoir 0. On fait le choix que $x = 1$ et on obtient une solution non nulle à ce système. Donc 1 est une valeur propre de A.

On regarde maintenant si 2 est une valeur propre. On résoud le système suivant : $\begin{cases} x + y = 2 \cdot x \\ y = 2 \cdot y \end{cases}$ Ce qui se simplifie en $\begin{cases} -x + y = 0 \\ -y = 0 \end{cases}$ et puis $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$. On en déduit que le système n'a qu'une seule solution : $(0, 0)$. Ainsi 2 n'est pas une valeur propre de A.

Définition 1.2. Le polynome caractéristique de A est le polynome obtenu à partir du déterminant $\det(XI_n - A)$.

Exemple 1.2.1. On conidère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Alors $\det(XI_2 - A) = \begin{vmatrix} X-1 & 2 \\ 2 & X-1 \end{vmatrix} = (X-1)(X-1) - 2^2 = (X-1)^2 - 4 = X^2 - 2X + 1 - 4 = X^2 - 2X - 3$.

Théorème 1.2.1. Les valeurs propres de A sont les racines du polynôme caractéristique de A.

Ce théorème justifie la méthode suivante pour calculer les valeurs propres d'une matrice :

Méthode 1.2.1 (Calcul des valeurs propres d'une matrice)**.** Soit A une matrice carrée :

- calculer le polynôme caractéristique
- chercher ses racines (avec discriminant ou en factorisant)

Exemple 1.2.2. Calculons les valeurs propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Son polynôme caractéristique est $x^2 - 2x - 3$. Ses racines sont -1 et 3 (grâce au calcul du discriminant). Ainsi les valeurs propres de A sont -1 et 3.

Définition 1.3. La multiplicité d'une valeur propre λ est définie comme étant la multiplicité de la racine λ dans le polynôme caractéristique.

Rappel : la multiplicité d'une racine a d'un polynôme P est l'exposant de $(X - a)$ dans la factorisation de P.

Exemple 1.3.1. La multiplicité de la valeur propre 0 de la matrice suivante $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est 3.

1.2 Vecteur propre

Définition 1.4 (Vecteur propre)**.** Un vecteur propre X associée à la valeur propre λ de A est un vecteur non nul tel que $AX = \lambda X$.

Exemple 1.4.1. Comme $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ alors le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 3 de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Remarque : le vecteur nul n'est jamais un vecteur propre.

Méthode 1.4.1 (Trouver un vecteur propre)**.** On écrit le système $AX = \lambda X$. On résoud le système en fixant à un moment une variable à 1 (par exemple). Il se peut qu'il faille fixer d'autres variables.

Remarque : la méthode n'aboutira pas si λ n'est pas une valeur propre.

Exemple 1.4.2. On considère la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et la valeur propre 3.

On considère l'équation : $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ qui donne le système suivant :

$$\begin{cases} x + 2y = 3x \\ 2x + \ \ y = 3y \end{cases} \iff \begin{cases} -2x + 2y = 0 \\ \ \ 2x - 2y = 0 \end{cases} \iff \left\{ -2x + 2y = 0 \right. \iff \left\{ y = x \right.$$

On fixe x à 1 (on a le choix). Donc $y = 1$ et on obtient $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ comme vecteur propre.

Définition 1.5 (Sous-espace propre)**.** Le sous-espace propre associé à une valeur propre λ de A est l'ensemble des vecteurs propres associées à λ auquel on rajoute le vecteur nul.

Exemple 1.5.1. Le sous-espace propre associé à la valeur propre 3 de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ est l'ensemble :

$$S = \{(x, x) \colon x \in \mathbb{R}\} = \mathsf{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Théorème 1.5.1. *Les sous-espaces propres sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ où n est la taille de la matrice carrée.*

Ce théorème théorique justifie le fait qu'on puisse chercher une base d'un sous-espace propre ou à calculer sa dimension.

Méthode 1.5.1 (Calcul du sous-espace propre associée à une valeur propre)**.** On écrit le système $AX = \lambda X$. On résoud le système.

1.3 Diagonalisation

Définition 1.6. Une matrice carrée A est dite diagonalisable s'il existe une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP$ soit une matrice diagonale.

Exemple 1.6.1. Vu l'égalité matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

on en déduit que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ est diagonalisable.

Attention, toutes les matrices ne sont pas forcément diagonalisable. Par exemple la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable (on verra plus tard comment le montrer).

Théorème 1.6.1. Dans le cas où la matrice est diagonalisable, les coefficients diagonaux de $P^{-1}AP$ sont les valeurs propres de A (avec multiplicité).

Méthode 1.6.1 (Comment trouver P ?)**.** Soit A une matrice carrée dont on sait qu'elle est diagonalisable :

- on trouve une base pour chaque sous-espace propre (si le sous-espace propre est de dimension 1, il suffit de trouver un vecteur propre).
- on remplit les colonnes de P avec les vecteurs précédemment trouvés

Exemple 1.6.2. Sachant que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ est diagonalisable, trouvons P.

On a vu précédemment que les valeurs propres sont -1 et 3.

On a déjà calculé précédemment une base de l'espace propre associé à 3 qui est $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
On trouve de la même manière une base de l'espace propre associé à -1 : $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Il ne reste plus qu'à former la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ où la première colonne est le vecteur propre pour 3 et la deuxième colonne est le vecteur propre pour -1.

On en déduit que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Théorème 1.6.2. Une matrice carrée A est diagonalisable si et seulement si

- toutes les racines de P_A sont réelles
- pour toute valeur propre λ de A, la dimension de l'espace des vecteurs propres de λ est égal à la multiplicité de λ comme racine de P_A

Méthode 1.6.2 (Savoir si une matrice est diagonalisable)**.** Soit A une matrice carrée.

On calcule polynôme caractéristique.

On le factorise au maximum qu'on arrive (en factorisant par x si possible, en trouvant des racines "faciles", en utilisant le discriminant quand il reste un polynôme de degré 2).

Si à la fin on obtient un produit de facteurs du type $(x - a)^n$ (et pas de facteurs de degré ≥ 2), alors le polynôme n'a que des racines réelles.

Si dans la factorisation il y a un facteur de degré 2 de discriminant < 0, alors le polynôme n'a pas que des racines rélles.

Sinon, cela veut dire qu'il reste un facteur de degré ≥ 3 dans la factorisation que vous n'arrivez pas à factoriser : dans ce cas on ne peut pas répondre, l'énoncé donne peut être une indication pour factoriser ce polynôme.

Valeur propre	Dimension	Multiplicité
..	..	..

On ne continue que si le polynôme n'a que des racines réelles. Dans ce cas, on remplit le tableau suivant :

Il faut que toutes les dimensions soient égales aux mulitplicités.

Exemple 1.6.3.

Théorème 1.6.3. Soit λ une valeur propre de A, si on note d la dimension de l'espace propre associée à λ et m la multiplicité de la valeur propre, alors $1 \leq d \leq m$.

On déduit de l'theoreme précédente que si la multiplicité d'une valeur propre est 1, alors n'y a pas besoin de calculer la dimension de l'espace propre car on sait, grâce à cette theoreme, qu'elle vaut 1.

Théorème 1.6.4. Si le polynôme caractéristique est de degré n et a n racines distinctes, alors A est diagonalisable.

Méthode 1.6.3 (Méthode analytique)**.** Soit A une matrice carrée 3×3. On calcule P_A le polynôme caractéristique de A. On dresse le tableau de variation de P_A pour utiliser le théorème des valeurs intermédiaires et les variations de P_A pour trouver des racines de P_A.

Exemple 1.6.4.

Diagonalisation : Exercices

Exercice 1. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Est ce que 0 et 1 sont des valeurs propres ?

Exercice 2. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer les valeurs propres de A.

Exercice 3. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Trouver un vecteur propre pour la valeur propre 0. Calculer l'espace propre associé à la valeur propre 0.

Exercice 4. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, montrer que A est inversible puis exprimer l'inverse de A en fonction de A.

Faire pareil mais avec $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 5. Est ce que les matrices suivantes sont elles diagonalisables ? Si oui les diagonaliser.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 6. Montrer que la matrice suivante est diagonalisable. Indication : ne cherchez pas des racines "faciles" du polynôme caractéristique mais utiliser la méthode analytique.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 7. Trouver une matrice 2×2 dont les valeurs propres sont -1 et 1.

Existe t-il une matrice 2×2 dont les valeurs propres sont $-1, 1$ et 2 ?

Existe t-il une matrice 2×2 qui n'a que 1 comme valeur propre ?

Existe t-il une matrice 2×2 qui n'a aucune valeur propre ?

2 Espaces euclidiens

Définition 2.1. Le produit scalaire dans $\mathbb{R}^d$: $u \cdot v = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$.
Des fois aussi noté (u, v) ou $< u, v >$.

Remarque $u \cdot v = uv^T$

Exemple 2.1.1.

Théorème 2.1.1. Soient 3 vecteurs $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

- $u \cdot v = v \cdot u$
- $u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w$
- $(u + v) \cdot w = u \cdot w + v \cdot w$
- $(\lambda u) \cdot v = \lambda(u \cdot v)$

Définition 2.2. Soit $u \in \mathbb{R}^n$, on définit la norme de u par $||u|| = \sqrt{u \cdot u}$. Autrement dit

$$||u|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} u_i^2} = \sqrt{u_1^2 + \cdots + u_n^2}$$

Exemple 2.2.1.

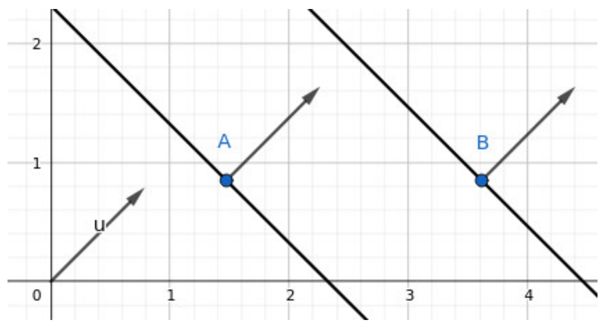
Description d'ensembles géométriques :
disques avec la norme
demi plans avec le produit scalaire

Espaces euclidiens : Exercices

Exercice 1. Soit $u = (3,4)$, $v = (3,0)$, $w = (-1,-5)$. Calculer $u \cdot v$, $v \cdot w$ et $(u+w) \cdot (u-v)$.

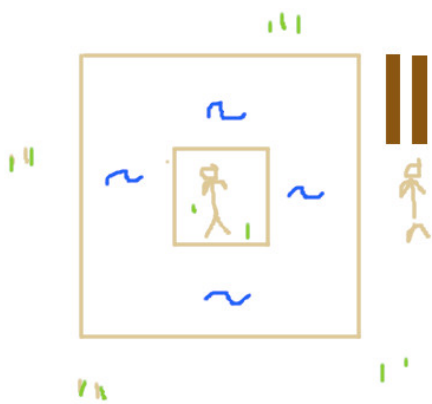
Trouver tous les points z du plan tel que $u \cdot z = 1$.

Exercice 2. Soient A et B deux points du plan et un vecteur u (non nul). Quelle équation doit vérifier un point C pour qu'il soit dans la zone entre les deux droites suivantes :



Exercice 3. Trouver les points de la droite $y = 2x - 1$ qui sont à distance 4 de $(0,0)$.

Exercice 4. Joseph est coincé sur une île carré de taille 1×1 m. L'île est séparée du continent par une mer carrée qui fait 1m de large. Joséphine, qui est sur le continent, veut le sauver. Elle a deux planches de bois de longueur 0,99m et de quelques centimètres de large. Comment peut elle faire ? (Note : les deux ne savent pas nager)



Exercice 5. Soit $u = (1,2)$. Trouver un vecteur unitaire orthogonal à v.

3 Espaces orthogonaux

Définition 3.1. On dit que deux sous-espaces vectoriels F et G de $\mathbb{R}^n$ sont orthogonaux si $x \perp y$ pour tout $x \in F$ et tout $y \in G$.

Théorème 3.1.1. Si $F = Vect(u_1, ..., u_k)$ et $G = Vect(v_1, ..., v_p)$. Alors F et G sont orthogonaux si et seulement si $u_i \perp v_j$ pour tout i et tout j.

Définition 3.2. Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt d'une famille de vecteurs.

Espaces orthogonaux : exercices

Exercice 1. Deux de ces espaces sont orthogonaux entre eux, lesquels ?

$$\mathsf{Vect}\left(\begin{pmatrix}2\\0\\3\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\1\\1\\0\end{pmatrix}\right)\qquad \mathsf{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\-1\\2\end{pmatrix}\right)\qquad \mathsf{Vect}\left(\begin{pmatrix}-1\\2\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\1\\1\\-3\end{pmatrix}\right)$$

Exercice 2. Calculer l'orthogonal de $\mathsf{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$

Exercice 3. Orthonormaliser les deux bases suivantes :

$$\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\qquad \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

Exercice 4. Trouver un u vecteur de $\mathbb{R}^3$ tel que les trois vecteurs suivants forment une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$:

$$u,\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$$

Puis l'orthonormaliser.

Exercice 5. Trouver l'équation de la droite passant par $(1,1)$ qui est orthogonale à la droite d'équation $y = 2x - 1$.

Exercice 6. Trouver l'équation de la droite passant par $(1,1,1)$ qui est orthogonale au plan d'équation $x + 2y - z = 0$.

Décomposition QR

La décomposition QR consiste à écrire une matrice carré A sous la forme d'un produit de deux matrices Q et R qui ont de bonnes propriétés d'orthogonalité que l'on va voir. Il s'agit d'une application du procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. Cette décomposition est utile pour résoudre des systèmes linéaires ainsi que pour calculer une valeur approchée des valeurs propres d'une matrice.

Dans ce cours on va juste voir une utilisation pratique de la décomposition QR.

Exemple de décomposition QR

Soit la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. On note c_1, c_2, c_3 les colonnes de P.

1. Montrer que P est inversible.

2. En déduire que $B_1 = (c_1, c_2, c_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

3. Appliquer le processus d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la base $B_1 = (c_1, c_2, c_3)$ pour construire une base $B_2 = (u_1, u_2, u_3)$ de $\mathbb{R}^3$.

4. Soit Q la matrice de passage de la base canonique à B_2. Montrer que $Q^{-1} = {}^tQ$.

5. Soit R la matrice de passage de B_2 à B_1. La calculer. Quelle est sa particularité ?

6. Justifier que $P = QR$ (sans faire le calcul).

7. Résoudre le système $\begin{cases} x - 3y + 4z = 1 \\ 2x \quad\quad - \ z = 1 \\ -2x + 3y + \ z = 1 \end{cases}$

Généralisation

De manière générale, si on part d'une matrice carrée A, on peut, en suivant le cheminement de l'exemple précédent, trouver une matrice inversible Q telle que $Q^{-1} = {}^tQ$ et une matrice triangulaire supérieure R tel que $A = QR$.

Ainsi si on cherche à résoudre le système linéaire $AX = Y$, alors on remarque que ce système est équivalent à $QRX = Y$ et donc à $RX = {}^tQY$. Comme R est triangulaire supérieure on résoud aisément ce système.

Décomposition QR : Corrigé

1. On calcule le déterminant :

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (-1)\times 2 \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + (-1)\times(-1) \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -2\times(-3-12)+(3-6) = 30-3 = 27$$

Comme le déterminant est non nul, alors la matrice est inversible

2. Comme $B_1 = (c_1, c_2, c_3)$ est composé de 3 vecteurs et que $\mathbb{R}^3$ est de dimension 3, il suffit de montrer que la famille B_1 est libre.

Supposons que la famille soit liée : alors il existe a, b, c tels que $ac_1 + bc_2 + cc_3 = 0$. En regardant le système on obtient :

$$\begin{cases} a - 3b + 4c = 0 \\ 2a \qquad - \; c = 0 \\ -2a + 3b + \; c = 0 \end{cases}$$

Qui est équivalent à

$$P \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Or comme P est inversible, alors $a = b = c = 0$. Donc la famille est libre et c'est donc une base de $\mathbb{R}^3$.

3. On normalise c_1 pour obtenir u_1 :

$$u_1 = \frac{c_1}{||c_1||} = \frac{(1,2,-2)}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}(1,2,-2)$$

On cherche maintenant u_2 :

$$u_2 = c_2 - < c_2, u1 > u_1 = (-3,0,3)-(-3)\frac{1}{3}(1,2,-2) = (-3,0,3)+(1,2,-2) = (-2,2,1)$$

On calcule $||u_2|| = \sqrt{4+4+1} = 3$. On normalise u_2 pour obtenir $u_2 = \frac{u_2}{||u_2||} = \frac{1}{3}(-2,2,1)$.

On cherche maintenant u_3 :

$$\begin{aligned} u_3 &= c_3 - < c_3, u_1 > u_1 - < c_3, u_2 > u_2 \\ &= (4,-1,1) - 0u_1 - (-3)\frac{1}{3}(-2,2,1) = (4,-1,1) + (-2,2,1) = (2,1,2) \end{aligned}$$

On normalise u_3 : $||u_3|| = 3$. Donc on pose finalement $u_3 = \frac{u_3}{||u_3||} = \frac{1}{3}(2, 1, 2)$.

Conclusion la base obtenue par le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt est :

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{3}(1, 2, -2) \\ u_2 &= \frac{1}{3}(-2, 2, 1) \\ u_3 &= \frac{1}{3}(2, 1, 2) \end{aligned}$$

(On peut vérifier qu'elle est orthogonale en calculant les produits scalaires deux à deux.)

4. La matrice de passage de la base canonique à B_2 est

$$Q = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(Pour l'obtenir on écrit les vecteurs u_1, u_2, u_3 en colonne à l'aide des coordonnées précédentes car ces coordonnées sont celles dans la base canonique)

Pour calculer la matrice inverse on peut utiliser la méthode des cofacteurs. Mais comme ici on annonce quelle matrice invere il faut trouver, il suffit juste de faire la mulitplication ${}^tQQ$ et montrer que ça fait I_3 pour montrer que l'inverse de Q est ${}^tQ$:

$${}^tQQ = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \cdots = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Il faut exprimer les vecteurs de la base B_1 en fonction de la base B_2. D'après le travail fait à la question 2 on a :

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{3}c_1 \\ u_2 &= \frac{1}{3}(c_2 - < c_2, u_1 > u_1) = \frac{1}{3}(c_2 + 3u_1) = \frac{1}{3}c_2 + \frac{1}{3}c_1 \\ u_3 &= \frac{1}{3}(c_3 - < c_3, u_1 > u_1 - < c_3, u_2 > u_2) = \frac{1}{3}(c_3 - 0u_1 + 3u_2) \\ &= \frac{1}{3}(c_3 + c_2 + c_1) = \frac{1}{3}c_1 + \frac{1}{3}c_2 + \frac{1}{3}c_3 \end{aligned}$$

Il faut donc exprimer les c_i en fonction des u_i :

$$\begin{aligned} c_1 &= 3u_1 \\ c_2 &= 3u_2 - 3u_1 \\ c_3 &= 3u_3 - 3u_2 \end{aligned}$$

Donc en écrivant en colonnes les vecteurs c_1, c_2, c_3 écrits dans la base u_1, u_2, u_3 on obtient :

$$R = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est triangulaire supérieure.

6. La matrice P est la matrice de passage de la base canonique à B_1. La matrice Q est la matrice de passage de la base canonique à B_2. La matrice R est la matrice de passage de la B_2 à B_1. Donc

$$P = QR$$

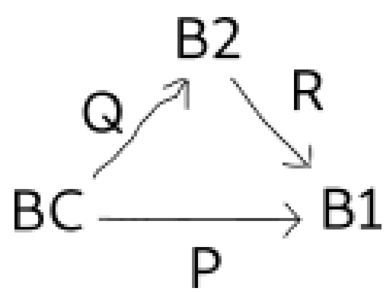


Figure 1: Schéma mnémotechnique du passage entre bases.

7. Il s'agit de résoudre $P \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On peut le résoudre avec la méthode classique (substitution de lignes et pivot de Gauss). Mais ici on va utiliser la décomposition de P en QR. Comme Q est inversible on a :

$$P \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \iff QR \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \iff R \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = Q^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\iff R \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = {}^tQ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On calcule

$${}^tQ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Ainsi le système est équivalent à :

$$\begin{cases} 3x - 3y & = \frac{1}{3} \\ \quad\quad 3y - 3z & = \frac{1}{3} \\ \quad\quad\quad\quad 3z & = \frac{5}{3} \end{cases}$$

qui est plus facile à résoudre que l'équation initiale car celle ci est maintenant triangulaire. Ainsi l'unique solution est :

$$x = \frac{7}{9}$$
$$y = \frac{2}{3}$$
$$z = \frac{5}{9}$$

4 Projecteurs orthogonaux

Définition 4.1. Projecteur orthogonaux de u sur un vecteur v

Projecteurs orthogonaux : exercices

Exercice 1. On considère le plan H défini par l'équation $x + 2y - 2z = 0$. On note p_H la projection orthogonale sur H.

a. Trouver une base de H.

b. Orthonormaliser cette base. On note u_1, u_2 les vecteurs de cette base.

c. Ecrire la matrice p_H dans la base canonique.

d. Compléter la base (u_1, u_2) de H en une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$ (c'est-à-dire trouver un vecteur u_3 tel que (u_1, u_2, u_3) forme une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$).

e. Ecrire la matrice de p_H dans la base précédente.

f. Quelles sont les valeurs propres de p_H ?

On considère maintenant un vecteur $v = (1, 2, 3)$.

g. Déterminer le projeté orthogonal de v sur H.

h. En déduire la distance de v à H.

Projecteurs orthogonaux : corrigé

Exercice 1.

a. $(x, y, z) \in H$ si et seulement si $\{x + 2y - 2z = 0$ ce qui est équivalent à $\{x = -2y + 2z$. Donc une base de H est formée des deux vecteurs $(-2, 1, 0)$ et $(2, 0, 1)$. (Et donc H est de dimension 2.

b. Si on note c_1, c_2 la base précédente alors :
$u_1 = \frac{c_1}{||c_1||} = \frac{(-2,1,0)}{||(-2,1,0)||} = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2, 1, 0)$

$$u_2 = c_2 - < c_2, u_1 > u_1 = (2, 0, 1) - \frac{1}{\sqrt{5}}(-4+0+0)u_1 = (2, 0, 1) + \frac{4}{5}(-2, 1, 0) = \frac{1}{5}(2, 4, 5)$$

On normalise u_2 :

$$u_2 \longleftarrow \frac{u_2}{||u_2||} = \frac{\frac{1}{5}(2, 4, 5)}{\frac{1}{5}\sqrt{2^2 + 4^2 + 5^2}} = \frac{(2, 4, 5)}{3\sqrt{5}}$$

c. On note $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ et $e_3 = (0, 0, 1)$ la base canonique. Alors il faut calculer $p_H(e_1)$, $p_H(e_2)$ et $p_H(e_3)$. Comme (u_1, u_2) est une base orthonormée de H, alors on a :

$$\begin{aligned}
p_H(e_1) &= < e_1, u_1 > u_1 + < e_1, u_2 > u_2 \\
&= \frac{-2}{\sqrt{5}} u_1 + \frac{2}{3\sqrt{5}} u_2 \\
&= \frac{-2}{\sqrt{5}} \frac{1}{\sqrt{5}}(-2, 1, 0) + \frac{2}{3\sqrt{5}} \frac{1}{3\sqrt{5}}(2, 4, 5) \\
&= \frac{-2}{5}(-2, 1, 0) + \frac{2}{9 \cdot 5}(2, 4, 5) \\
&= \frac{-18}{9 \cdot 5}(-2, 1, 0) + \frac{2}{9 \cdot 5}(2, 4, 5) \\
&= \frac{1}{9 \cdot 5}((36, -18, 0) + (4, 8, 10) \\
&= \frac{1}{9 \cdot 5}(40, -10, 10) \\
&= \frac{1}{9}(8, -2, 2)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
p_H(e_2) &= < e_2, u_1 > u_1 + < e_2, u_2 > u_2 \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} u_1 + \frac{4}{3\sqrt{5}} u_2 \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{1}{\sqrt{5}} (-2, 1, 0) + \frac{4}{3\sqrt{5}} \frac{1}{3\sqrt{5}} (2, 4, 5) \\
&= \frac{1}{5} (-2, 1, 0) + \frac{4}{9 \cdot 5} (2, 4, 5) \\
&= \frac{1}{9 \cdot 5} (-18, 9, 0) + \frac{1}{9 \cdot 5} (8, 16, 20) \\
&= \frac{1}{9 \cdot 5} (-10, 25, 20) \\
&= \frac{1}{9} (-2, 5, 4)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p_H(e_3) &= < e_3, u_1 > u_1 + < e_3, u_2 > u_2 \\
&= 0 u_1 + \frac{5}{3\sqrt{5}} u_2 \\
&= \frac{5}{3\sqrt{5}} \frac{1}{3\sqrt{5}} (2, 4, 5) \\
&= \frac{5}{9 \cdot 5} (2, 4, 5) \\
&= \frac{1}{9} (2, 4, 5)
\end{aligned}
$$

Donc la matrice de p_H dans la base canonique est :

$$
\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 8 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}
$$

d. On cherche $u_3 = (x, y, z)$ tel que $u_3 \cdot u_1 = 0$ et $u_3 \cdot u_2 = 0$ et tel que u_1, u_2, u_3 soit une base. Les deux premières conditions donne le système : $\begin{cases} -2x + \ \ y & + \frac{1}{\sqrt{5}}(+0) = 0 \\ \frac{1}{3\sqrt{5}}(2x + 4y + 5z) & = 0 \end{cases}$

Qui est équivalent à $\begin{cases} y & = 2x \\ & z = -2x \end{cases}$ (après substitution de y par x dans la deuxième équation).

On en déduit un vecteur $u_3 = (1, 2, -2)$ qui vérifie au moins l'orthogonalité avec u_1 et u_2.

Reste à montrer que u_1, u_2, u_3 forme une base. Pour montrer cela on peut calculer le déterminant de la matrice formée des coordonnées de u_1, u_2, u_3 :

$$\begin{vmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} & 2 \\ 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} & -2 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{vmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & -2 \end{vmatrix} = \cdots = 3$$

Comme ce déterminant est non nul, on en déduit que u_1, u_2, u_3 forme une base de $\mathbb{R}^3$.

e. Comme u_1 et u_2 sont dans H, alors $p_H(u_1) = u_1$ et $p_H(u_2) = u_2$. (On peut aussi le vérifier en utilisant la formule de p_H)

De plus

$$p_H(u_3) =< u_3, u_1 > u_1 + < u_3, u_2 > u_2 = 0u_1 + 0u_2$$

On en déduit que la matrice de p_H dans la base u_1, u_2, u_3 est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

f. Les valeurs propres de p_H sont les valeurs d'une matrice de p_H dans une base quelconque. En considérant la base précédente, on en déduit que les valeurs propres sont 1 et 0 (car la matrice est diagonale).

g. On calcule :

$$\begin{aligned} p_H(v) &=< v, u_1 > u_1 + < v, u_2 > u_2 \\ &= 0u_1 + \frac{1}{3\sqrt{5}}(2+8+15)u_2 \\ &= \frac{25}{3\sqrt{5}}\frac{(2,4,5)}{3\sqrt{5}} \\ &= \frac{25}{9\cdot 5}(2,4,5) \\ &= \frac{5}{9}(2,4,5) \end{aligned}$$

h. La distance de v à H est :

$$\begin{aligned} ||v - p_H(v)|| &= ||(1,2,3) - \frac{5}{9}(2,4,5)|| = \frac{1}{9}||9(1,2,3) - 5(2,4,5)|| \\ &= \frac{1}{9}||(9-10, 18-20, 27-25)|| = \frac{1}{9}||(-1,-2,2)|| \\ &= \frac{\sqrt{9}}{9} = \frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$